Twee snijdende cirkels

18. Ik zou hier gelijk een bewijs kunnen geven dat je wel snapt als je het leest, maar dat ga ik niet doen. Dan snap je namelijk wel hoe het bewijs werkt, maar je weet nog steeds niet hoe ik ooit op dat bewijs gekomen ben.

Ik zal dus voornamelijk de gedachtegang uitleggen die je ertoe brengt om het probleem op een bepaalde manier op te lossen, en dan zal ik op het eind het uiteindelijke bewijs geven. Eerst moet je alle stellingen opschrijven die je kent waar het woord cirkel in voorkomt. Een daarvan, Thales, kan je alleen al door naar het plaatje te kijken afschrijven, aangezien je geen rechte hoeken ziet, dus waarschijnlijk is die hier niet zo nuttig. Je houdt dan twee stellingen over: de koordenvierhoekstelling en de stelling van de constante hoek. In het eerste geval zou je moeten bewijzen dat

$$\angle NMD + \angle DCN = 180,$$

en in het laatste geval zou je ofwel moeten bewijzen dat

$$\angle MDN = \angle MCN,$$

ofwel dat

$$\angle DMC = \angle DNC.$$

Zo op het eerste gezicht lijkt het moeilijk om de koordenvierhoekstelling hier te gebruiken, maar de twee manieren waarop je de stelling van de constante hoek kunt gebruiken lijken wat makkelijker. Het blijkt dat het nog net iets makkelijker is om te bewijzen dat

$$\angle MDN = \angle MCN,$$

maar als je de andere optie gebruikt is het niet heel veel moeilijker. Ik zal nu het uiteindelijke bewijs geven, waar ik de stelling van de constante hoek zal gebruiken:

Vanwege het feit dat B en D op een cirkel met middelpunt M liggen is ΔBDM gelijkbenig, en dus geldt

$$\angle MDN = \angle MBD.$$

Hetzelfde argument is toe te passen op driehoek ΔBCN: Omdat ΔBCN gelijkbenig is geldt

$$\angle MCN = \angle NBC.$$

Nu geldt vanwege overstaande hoeken dat

$$\angle MBD = \angle NBC,$$

dus samenvattend geldt er

$$\angle MDN = \angle MBD = \angle NBC = \angle MCN.$$

Vanwege de stelling van de constante hoek geldt nu dat M, N, C en D op een cirkel liggen.