

Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Tussen twee grafieken

1 maximumscore 3

- Voor de x -coördinaat van Q geldt: $\sqrt{1-x} = p$ 1
- Dus $1-x = p^2$ 1
- De x -coördinaat van Q is dus $1-p^2$ 1

of

- Er moet gelden: $f(1-p^2) = p$ 1
- $f(1-p^2) = \sqrt{1-(1-p^2)}$ 1
- Dus $f(1-p^2) = \sqrt{p^2}$ en dit is (omdat $p > 0$) gelijk aan p 1

2 maximumscore 6

- $PQ = 1-p^2-p$ 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $p(1-p^2-p) = p-p^3-p^2$ 1
- De afgeleide hiervan is $1-3p^2-2p$ 1
- $-3p^2-2p+1=0$ geeft $p = \frac{2+\sqrt{16}}{-6}$ of $p = \frac{2-\sqrt{16}}{-6}$
- (of: $p^2 + \frac{2}{3}p - \frac{1}{3} = 0$, dus $(p - \frac{1}{3})(p+1) = 0$) 2
- ($p > 0$, dus) het antwoord is $p = \frac{1}{3}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

3 maximumscore 6

- De inhoud is $\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x) dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx$ 2
- Een primitieve van $1-x$ is $x - \frac{1}{2}x^2$ 1
- Een primitieve van x^2 is $\frac{1}{3}x^3$ 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam is $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{24}\pi = \frac{1}{3}\pi$ 2

of

- De inhoud is $\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x) dx$ verminderd met de inhoud van een kegel 2
- Een primitieve van $1-x$ is $x - \frac{1}{2}x^2$ 1
- $\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x) dx = \frac{3}{8}\pi$ 1
- De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}\pi$ 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam is $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{24}\pi = \frac{1}{3}\pi$ 1

Opmerking

Als de inhoud (foutief) berekend is met $\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-x} - x)^2 dx$, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Raakcirkels aan een lijn

4 maximumscore 4

- $\angle GFR = \angle HFS$ (of: $\angle FRG = \angle FSH$; *F-hoeken*) 1
- Verder $\angle FGR = \angle FHS (= 90^\circ)$, dus $\triangle FRG \sim \triangle FSH$; *hh* 1
- Uit ($FG = GH$, dus) $FH = 2 \cdot FG$ volgt nu $FS = 2 \cdot FR$ 1
- Dus $FR = RS$ 1

of

- Noem de loodrechte projectie van S op k T . Dan geldt: $\angle SRT = \angle FRG$; *overstaande hoeken* 1
- $\triangle SHGT$ is een rechthoek, dus $ST = GH$; (*rechthoek*), en $FG = GH$, dus $ST = FG$ 1
- Verder is $\angle STR = \angle FGR (= 90^\circ)$, dus $\triangle SRT \cong \triangle FRG$; *ZHH* 1
- Dus $FR = RS$ 1

of

- Noem de loodrechte projectie van R op m U . Dan is RU evenwijdig met FH ; (*F-hoeken*), dus $\angle SRU = \angle RFG$; *F-hoeken* 1
- $\triangle HGRU$ is een rechthoek, dus $RU = GH$; (*rechthoek*), en $FG = GH$, dus $RU = FG$ 1
- Verder is $\angle RUS = \angle FGR (= 90^\circ)$, dus $\triangle SUR \cong \triangle RGF$; *HZH* 1
- Dus $FR = RS$ 1

of

- Noem de lijn door F evenwijdig met k en m : n . Dan is (omdat de loodlijn vanuit F op k en m ook loodrecht staat op n ; *F-hoeken* (of *Z-hoeken*) en $FG = GH$) k de middenparallel van m en n ; (*afstand punt tot lijn, middenparallel*) 1
- Hieruit volgt: (R heeft gelijke afstanden tot m en n , dus) $RU = RV$ met U en V de loodrechte projecties van R op respectievelijk m en n ; *middenparallel, (afstand punt tot lijn)* 1
- Verder geldt $\angle RUS = \angle RVF (90^\circ)$ en $\angle SRU = \angle FRV$; *overstaande hoeken*, dus $\triangle SRU \cong \triangle FRV$; *HZH* (of: $\angle RSU = \angle RFV$; *Z-hoeken*, dus $\triangle SRU \cong \triangle FRV$; *ZHH*) 1
- Dus $FR = RS$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
5	maximumscore 3	
	<ul style="list-style-type: none"> Uit $\triangle FXS \sim \triangle FMR$ volgt $\angle FXS = \angle FMR$ (of $\angle FSX = \angle FRM$), dus $XS \parallel MR$; <i>F-hoeken</i> 	1
	<ul style="list-style-type: none"> MR staat loodrecht op k; <i>raaklijn</i>, dus XS staat loodrecht op k; (<i>F-hoeken</i>) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Bovendien $m \parallel k$, dus XS staat loodrecht op m; (<i>F-hoeken</i>) 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> Uit $\triangle FXS \sim \triangle FMR$ volgt $\angle FSX = \angle FRM$. Verder geldt $\angle FSH = \angle FRG$; <i>F-hoeken</i> 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dus $\angle XSH = \angle FSX + \angle FSH = \angle FRM + \angle FRG = \angle MRG$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $\angle MRG = 90^\circ$; <i>raaklijn</i>, dus ook $\angle XSH = 90^\circ$ (ofwel XS staat loodrecht op m) 	1
6	maximumscore 3	
	<ul style="list-style-type: none"> Uit $\triangle FXS \sim \triangle FMR$ en $FX = 2 \cdot FM$ (of $FS = 2 \cdot FR$) volgt $XS = 2 \cdot MR$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $FM = MR$; (<i>cirkel</i>) en $FX = 2 \cdot FM$ geeft $FX = 2 \cdot MR$, dus $FX = XS$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit en uit $XS \perp m$ volgt dat XF gelijk is aan de afstand van X tot m, dus X ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn m; (<i>afstand punt tot lijn, parabool</i>) 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> $\angle FRX = 90^\circ$; <i>Thales</i> en $FR = RS$, dus RX is middelloodlijn van FS; (<i>middelloodlijn</i>) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dit geeft $XF = XS$; <i>middelloodlijn</i> 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit en uit $XS \perp m$ volgt dat XF gelijk is aan de afstand van X tot m, dus X ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn m; (<i>afstand punt tot lijn, parabool</i>) 	1

Extrusie

7	maximumscore 3	
	<ul style="list-style-type: none"> De omtrek van de grote opening is k keer zo groot als die van de kleine 	1
	<ul style="list-style-type: none"> De oppervlakte van de grote opening is k^2 keer zo groot als die van de kleine 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Voor de grote opening is \sqrt{A} dus k keer zo groot als voor de kleine, dus (wegens $\frac{k}{k} = 1$) het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is voor beide openingen even groot 	1

Vraag	Antwoord	Scores
8	maximumscore 8	
	<ul style="list-style-type: none"> • $P = 4 + \int_{-2}^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ ($= 4 + \int_{-2}^2 \sqrt{1 + (-1\frac{1}{2}x)^2} dx$) 	2
	<ul style="list-style-type: none"> • Beschrijven hoe de integraal kan worden berekend 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $P \approx 11,54$ (cm) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $A = \int_{-2}^2 (3 - \frac{3}{4}x^2) dx$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Beschrijven hoe de integraal kan worden berekend 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $A = 8$ (cm²) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{P}{\sqrt{A}} \approx \frac{11,54}{\sqrt{8}}$, dus het antwoord is 4,1 	1
9	maximumscore 5	
	<ul style="list-style-type: none"> • Voor een opening van x bij 1 is $P = 2x + 2$ en $A = x$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is dus $\frac{2x+2}{\sqrt{x}}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $\frac{2x+2}{\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ (of $\frac{2x+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • De afgeleide hiervan is $x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$ (of $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Deze is 0 als $x = 1$ (dus de x-coördinaat van de top is 1) 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> • Voor een opening van x bij 1 is $P = 2x + 2$ en $A = x$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is dus $\frac{2x+2}{\sqrt{x}}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • De afgeleide hiervan is $\frac{2 \cdot \sqrt{x} - (2x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Dit is gelijk aan $\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Deze is 0 als $x = 1$ (dus de x-coördinaat van de top is 1) 	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

De formule van Gompertz

10 maximumscore 4

- Dan moet gelden $P(t) = 50$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $119 \cdot e^{-0,0161 \cdot e^{0,0595t}} = 50$ kan worden opgelost 1
- $t \approx 67$ 1
- Dus 27 jaar na afsluiten van de polis is de helft overleden 1

11 maximumscore 3

- $119 = 100 \cdot 1,19 = 100 \cdot e^{\ln 1,19} \approx 100 \cdot e^{0,1740}$ 2
 - $P(t) \approx 100 \cdot e^{0,1740} \cdot e^{-0,0161 \cdot e^{0,0595t}} = 100 \cdot e^{0,1740 - 0,0161 \cdot e^{0,0595t}}$, dus $m \approx 0,17$ 1
- of
- $100 \cdot e^{m - 0,0161 \cdot e^{0,0595t}} = 100 \cdot e^m \cdot e^{-0,0161 \cdot e^{0,0595t}}$ 1
 - $100 \cdot e^m \cdot e^{-0,0161 \cdot e^{0,0595t}} = 119 \cdot e^{-0,0161 \cdot e^{0,0595t}}$ geldt als $100 \cdot e^m = 119$ 1
 - Dus $m = \ln 1,19 \approx 0,17$ 1

12 maximumscore 4

- $P'(t) = a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -b \cdot e^{kt} \cdot k$ 2
- $\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -b \cdot e^{kt} \cdot k}{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}}} = -b \cdot e^{kt} \cdot k$ 1
- Dus $c = -bk$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Goniometrische functies

13 maximumscore 4

- $\sin x + \sin(2x) = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ 1
- $\sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$ geeft $\sin x \cdot (1 + 2 \cdot \cos x) = 0$ 1
- Dus $\sin x = 0$ of $\cos x = -\frac{1}{2}$ 1
- De x -coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$ 1

of

- $\sin x + \sin(2x) = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ 1
- $\sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$ geeft, omdat $\sin x > 0$ op $\langle 0, \pi \rangle$, $1 + 2 \cdot \cos x = 0$ 1
- Dus $\cos x = -\frac{1}{2}$ 1
- De x -coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$ 1

of

- $\sin x + \sin(2x) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2}x) \cdot \cos(\frac{1}{2}x)$
(of $\sin x + \sin(2x) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{2}x) \cdot \cos(-\frac{1}{2}x)$) 1
- $2 \cdot \sin(\frac{1}{2}x) \cdot \cos(\frac{1}{2}x) = 0$ geeft $\sin(\frac{1}{2}x) = 0$ of $\cos(\frac{1}{2}x) = 0$ 1
- $\frac{1}{2}x = k \cdot \pi$ of $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (met k geheel) 1
- De x -coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$ 1

of

- $\sin x + \sin(2x) = 0$ geeft $\sin(2x) = \sin(-x)$ 1
- Dus $2x = -x + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pi + x + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Dus $x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- De x -coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$ 1

14 maximumscore 5

- $f'_a(x) = \cos x + 2a \cdot \cos(2x)$ 1
- Er moet gelden: $\cos(\frac{5}{6}\pi) + 2a \cdot \cos(\frac{5}{3}\pi) = 0$ 1
- Dus $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2a \cdot \frac{1}{2} = 0$ en hieruit volgt $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
(of $a = \frac{-\cos\frac{5}{6}\pi}{2 \cdot \cos\frac{5}{3}\pi} \approx 0,866$) 1
- Beschrijven hoe de x -coördinaat van de andere top van de grafiek van $f_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$ (of van $f_{0,866}$) gevonden kan worden 1
- Het antwoord is 0,96 1

Vraag	Antwoord	Scores
15	maximumscore 5	
	<ul style="list-style-type: none"> De oppervlakte is $\int_0^{\pi} (\sin x + a \cdot \sin(2x)) dx$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Een primitieve van $\sin x + a \cdot \sin(2x)$ is $-\cos x - \frac{1}{2}a \cdot \cos(2x)$ 	2
	<ul style="list-style-type: none"> De oppervlakte is dus $(1 - \frac{1}{2}a) - (-1 - \frac{1}{2}a) = 2$ (en dit is onafhankelijk van a) 	2
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> De oppervlakte is $\int_0^{\pi} (\sin x + a \cdot \sin(2x)) dx$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> De oppervlakte is dus $\int_0^{\pi} \sin x dx + a \cdot \int_0^{\pi} \sin(2x) dx$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Aantonen dat $\int_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0$ (met behulp van een primitieve of met behulp van symmetrie) 	2
	<ul style="list-style-type: none"> De oppervlakte is dus $\int_0^{\pi} \sin x dx$ (en dit is onafhankelijk van a) 	1

Opmerking

Als de oppervlakte van het vlakdeel voor een aantal waarden van a is berekend en daaruit is geconcludeerd dat deze onafhankelijk van a is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

Cirkels bij een driehoek

16 maximumscore 3

- Het middelpunt van de cirkel door D die AB raakt in A , is het snijpunt van de middelloodlijn van AD en de loodlijn op AB door A ; (*cirkel, middelloodlijn, raaklijn*) 2
- Het tekenen van (een deel van) deze cirkel met het snijpunt E 1

17 maximumscore 4

- $\angle ABD = \angle BFD$ en $\angle ACD = \angle CFD$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- Dit geeft $\angle BFC = \angle BFD + \angle CFD = \angle ABD + \angle ACD$ 1
- Dus $\angle BFC + \angle BAC = \angle ABD + \angle ACD + \angle BAC = 180^\circ$; *hoekensom driehoek* 1
- Hieruit volgt dat $ABFC$ een koordenvierhoek is; (*koordenvierhoek*) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Vierkant bij een derdegraadskromme

18 maximumscore 8

- $f(x) = 0$ geeft (behalve $x = 0$): $\frac{1}{3}x^2 = b$, dus de x -coördinaat van A is $\sqrt{3b}$ 1
- $f'(x) = b - x^2$ 1
- Dus de x -coördinaat van T is \sqrt{b} 1
- De y -coördinaat van T is $b\sqrt{b} - \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3$ 1
- Rechthoek $OABC$ is een vierkant als $b\sqrt{b} - \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3 = \sqrt{3b}$ 1
- $b\sqrt{b} - \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3$ herleiden tot $\frac{2}{3}b\sqrt{b}$ 1
- $\frac{2}{3}b\sqrt{b} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b}$ geeft (omdat $b > 0$) $b = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2