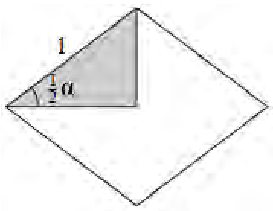
Onderzetter

4. Eerst kijk je naar de afmetingen van één ruit. Je kunt zowel de hoogte als de breedte bepalen door te kijken naar een rechthoekige driehoek in de ruit zoals in de figuur hieronder. De lengte van de ruit is nu gelijk



aan twee maal de aanliggende zijde van de gegeven hoek in de gearceerde driehoek, oftewel:

$$\textit{lengte ruit} = 2 \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\alpha) \cdot 1$$

De breedte van de ruit is gelijk aan twee maal de overstaande zijde van de gegeven hoek, oftewel:

$$\textit{breedte ruit} = 2 \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\alpha) \cdot 1$$

De lengte van de hele onderzetter l is gelijk aan 5 maal de lengte van ´e´en ruit, oftewel:

$$l = 10 \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

De eerste formule is dus juist. De breedte van de hele onderzetter is gelijk aan 3 maal de breedte van één ruit, oftewel:

$$b = 6 \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Ook de tweede formule is dus juist.

5. Eerst probeer je α uit te rekenen. Dit doe je met de volgende formule:

$$l = 10 \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Nu vul je in dat $l = 8$.

$$8 = 10 \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\alpha) \;\rightarrow\; \cos(\tfrac{1}{2}\alpha) = 0{,}8$$

Op dit moment merk je dat je geen exacte waarde voor α kunt opstellen, maar je hoeft gelukkig α ook niet per se uit te rekenen. Als je α zou weten, zou je namelijk gelijk daarna $\sin(\frac{1}{2}\alpha)$ uitrekenen, en dit kan ook in een keer. Hierbij maak je gebruik van de formule $\sin^2$ (A) + $\cos^2$ (A) = 1.
Er geldt dus:

$$\sin(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha)} = \sqrt{1-(\tfrac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\tfrac{16}{25}} = \sqrt{\tfrac{9}{25}} = \tfrac{3}{5}$$

Nu je $\sin(\frac{1}{2}\alpha)$ weet, kun je b uitrekenen.

$$b = 6\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\alpha) = 6\cdot\tfrac{3}{5} = 3\tfrac{3}{5}$$

6. Als b even snel toeneemt als l afneemt, betekent die dat de afgeleide van b gelijk is aan min de afgeleide van l. Je kunt het best eerst deze afgeleides uitrekenen. Hierbij moet je wel de kettingregel gebruiken.

$$b' = 6\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)\cdot\tfrac{1}{2} = 3\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Hier is het vermenigvuldigen met ½ dus een gevolg van de kettingregel.
Nu doe je hetzelfde voor l.

$$l' = -10\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)\cdot\tfrac{1}{2} = -5\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Nu moet je de vergelijking b = −l oplossen, ofwel:

$$3\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\alpha) = 5\cdot\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Dit mag in principe met de rekenmachine opgelost worden, maar het kan ook algebraïsch. Ik laat beide manieren zien.
Op de Ti-84 plus voer je de linker- en rechterkant van de vergelijking als twee formules in, en vervolgens bepaal je met calc intersect het snijpunt van de twee grafieken. Je vindt dan $\alpha \approx$ 1.08.
Als je algebraïsch verdergaat, kwadrateer je eerst aan beide kanten.

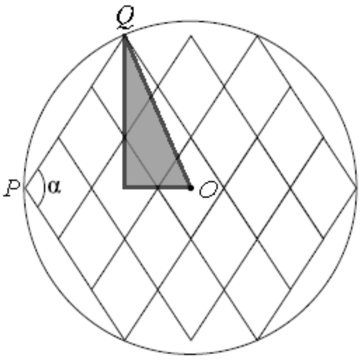
$$9\cdot\cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha) = 25\cdot\sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) = 25\cdot(1-\cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha))$$

immers $\sin^2$ (A) + $\cos^2$ (A) = 1. Je gebruikt deze regel om aan beide kanten ofwel een sinus ofwel een cosinus te krijgen.

$$9\cdot\cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha) = 25-25\cdot\cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha) \rightarrow 34\cdot\cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha) = 25 \rightarrow \cos(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\tfrac{25}{34}}$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \cos^{-1}(\sqrt{\tfrac{25}{34}}) \approx 0{,}54 \rightarrow \alpha \approx 1{,}08$$

7. Om deze formule aan te tonen kijk je naar de gearceerde rechthoekige driehoek in onderstaande figuur.



In opgave 4 heb je gezien dat de lengte van één ruit gelijk is aan 2 · cos(½ α) , en dat de breedte van één ruit gelijk is aan 2 · sin(½ α).
Je ziet dat één van de rechte zijden in de gearceerde driehoek gelijk is aan de lengte van één ruit, en dat de andere rechte zijde gelijk is aan 1.5 keer de breedte van één ruit. Om de lengte van de schuine zijde te berekenen gebruik je de stelling van Pythagoras.

$$OQ = \sqrt{(1{,}5 \cdot \textit{breedte van één ruit})^2 + (\textit{lengte van één ruit})^2}$$

$$OQ = \sqrt{(3 \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\alpha))^2 + (2 \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\alpha))^2} = \sqrt{9 \cdot \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + 4 \cdot \cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha)}$$

Nu gebruik je de formule $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ om de cosinus om te schrijven naar een sinus.

$$OQ = \sqrt{9 \cdot \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + 4 - 4 \cdot \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha)} = \sqrt{5 \cdot \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + 4}$$

Dit is precies de formule waar om gevraagd werd.

8. Als P en Q op een cirkel met middelpunt O liggen moet gelden dat $OP = OQ$.
OQ heb je in de vorige opgave uitgerekend, en OP is gelijk aan ½ l,
ofwel ½ · 10 · cos(½ α). Je moet dus de volgende vergelijking oplossen:

$$\sqrt{5 \cdot \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + 4} \;=\; 5 \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Het is hier weer toegestaan om de oplossing van deze vergelijking met de GR te bepalen, maar ook hier is het mogelijk om de oplossing algebraïsch te bepalen. Ik geef weer beide oplossingen. Als je het met de Ti-84 plus doet, voer je de linker- en rechterkant van de vergelijking als aparte formules in, en gebruik je calc intersect om het snijpunt te bepalen. Je vindt dan α ≈ 1.98. Als je algebraïsch verdergaat, is je eerste stap om aan beide kanten te kwadrateren.

$$5 \cdot \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + 4 \;=\; 25 \cdot \cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Nu gebruik je de formule $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ om de cosinus om te schrijven naar een sinus. Deze keuze is volstrekt willekeurig. Je kunt er ook voor kiezen om de sinus om te schrijven naar een cosinus, en dit levert je geen voordeel of nadeel op. Als je dat dus hebt gedaan is het niet fout.

$$5 \cdot \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + 4 \;=\; 25 - 25 \cdot \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) \;\rightarrow\; 30\sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) + 4 \;=\; 25$$

$$30\sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) \;=\; 21 \;\rightarrow\; \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) \;=\; \tfrac{21}{30} \;\rightarrow\; \sin(\tfrac{1}{2}\alpha) \;=\; \sqrt{\tfrac{21}{30}}$$

$$\alpha \;=\; \sin^{-1}(\sqrt{\tfrac{21}{30}}) \;\approx\; 1{,}98$$

Hier komt dus ook 1,98 uit.