Wortelfuncties

10. Eerst reken je de snijpunten van $f_{12}(x)$ en de lijn $y = x$ uit. Je lost daarvoor de volgende vergelijking op.

$$12 + 6\sqrt{x-12} = x$$

Eerst isoleer je de wortel, zodat je later gemakkelijk kunt kwadrateren.

$$6\sqrt{x-12} = x - 12$$

Nu kun je kwadrateren. Je komt misschien in de verleiding om het kwadraat aan de rechterkant uit te werken, maar het is hier handiger om dat niet te doen.

$$36(x-12) = (x-12)^2$$
$$(x-12)^2 - 36(x-12) = 0$$
$$(x-12)((x-12)-36) = 0$$
$$x - 12 = 0 \bigvee x - 12 - 36 = 0$$
$$x = 12 \bigvee x = 36 + 12 = 48$$

Je krijgt dus straks als je gaat integreren de grenzen $x = 12$ en $x = 48$. De integraal die je moet oplossen is het verschil van de twee grafieken.

$$opp = \int_{12}^{48} (f_{12}(x) - x) = \int_{12}^{48} \left(12 + 6\sqrt{x-12} - x\right)$$

Voor je gaat integreren is het handig om wat je nu hebt wat handiger op te schrijven.

$$opp = \int_{12}^{48} \left(12 + 6 \cdot (x-12)^{0,5} - x\right)$$

Nu kun je integreren

$$opp = \left[12x + \frac{6}{0,5+1} \cdot (x-12)^{0,5+1} - \frac{1}{2}x^2\right]_{12}^{48}$$

$$opp = \left[12x + 4 \cdot (x-12)^{1,5} - \frac{1}{2}x^2\right]_{12}^{48}$$

$$opp = \left(12 \cdot 48 + 4 \cdot (48-12)^{1,5} - \frac{1}{2} \cdot 48^2\right) - \left(12 \cdot 12 + 4 \cdot (12-12)^{1,5} - \frac{1}{2} \cdot 12^2\right)$$

$$opp = (576 + 864 - 1152) - \left(144 + 0 - \frac{1}{2} \cdot 144\right) = 216$$

11. Het gevraagde bewijs bestaat uit twee delen. Ten eerste moet je bewijzen dat bij $x = n + 9$ de y-waarden van beide formules gelijk zijn, en je moet bewijzen dat bij $x = n + 9$ de afgeleides van beide formules gelijk zijn. Alleen dan is bewezen dat de grafieken elkaar in dat punt raken. Eerst vul je $x = n + 9$ in in beide formules.

$$f_n(n+9) = n + 6\sqrt{n+9-n} = n + 6\sqrt{9} = n + 18$$

Als je in de formule $y = x + 9$ invult dat $x = n + 9$ krijg je $y = n + 9 + 9 = n + 18$. Dit is hetzelfde als $f_n(n + 9)$, dus aan de eerste voorwaarde is voldaan. Voor de volgende voorwaarde bereken je de afgeleide van $f_n(x)$. Hier moet je de kettingregel toepassen, hoewel dit hier geen gevolgen heeft. Door de kettingregel vermenigvuldig je met 1. Het antwoord verandert hier dus niet door, maar het is goed om de kettingregel altijd toe te passen als er iets anders dan gewoon x in de wortel staat. Je krijgt geen foute antwoorden als je de kettingregel te vaak toepast, maar wel als je hem te weinig toepast.

$$f_n'(x) = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-n}} = \frac{3}{\sqrt{x-n}}$$

Nu vul je $x = n + 9$ in om de afgeleide in dat punt te berekenen.

$$f_n'(n+9) = \frac{3}{\sqrt{n+9-n}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

De richtingscoëfficiënt van k is ook 1, dus de grafieken hebben ook dezelfde helling. Er is dus aan beide voorwaarden voldaan, en het punt is dus inderdaad een raakpunt.