Een exponentiële functie

6. Om de x-coördinaat van de top van de grafiek uit te rekenen differentieer je $f(x)$, en los je vervolgens de vergelijking $f'(x) = 0$ op. Eerst differentieer je $f(x)$. Hier moet je gebruik maken van de quotiëntregel.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot 8 - 8x \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(8 - 8x)}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{8 - 8x}{e^x}$$

Nu los je de vergelijking $f'(x) = 0$ op.

$$\frac{8 - 8x}{e^x}0$$

$$8 - 8x = 0$$

$$8x = 8$$

$$x = 1$$

De x-coördinaat van de top is dus 1.

7. Een vierkant met zijde 2 heeft een hoogte van 2. Nu reken je eerst de snijpunten van $f(x)$ met de lijn $y = 2$ uit. Als deze snijpunten minder dan 2 uit elkaar liggen, past het niet.

$$\frac{8x}{e^x} = 2$$

Deze vergelijking kan niet algebraïsch worden opgelost, dus dit moet met de GR. Je voert op de Ti-84 plus de volgende twee formules in:

$$y_1 = \frac{8x}{e^x}$$

$$y_2 = 2$$

Nu bereken je met calc intersect de twee snijpunten van deze grafieken. Deze snijpunten zijn $x \approx 0,4$ en $x \approx 2,2$. $2,2 - 0,4 \approx 1,8$, dus het past niet.

8. Je moet eerst de snijpunten van $g_n(x)$ met $f(x)$ uitrekenen. Hiervoor los je de volgende vergelijking op.

$$\frac{8nx}{e^{nx}} = \frac{8x}{e^x}$$

Eerst deel je de breuk weg.

$$8nx \cdot e^x = 8x \cdot e^{nx}$$

$$x = 0 \bigvee n \cdot e^x = e^{nx}$$

De eerste oplossing is niet degene die je zoekt, dus je gaat alleen verder met de tweede oplossing.

$$n = \frac{e^{nx}}{e^x} = e^{nx-x}$$

$$\ln n = nx - x = (n-1)x$$

$$x = \frac{\ln n}{n-1}$$

Het vermoeden klopt dus.

9. Eerst moet je het snijpunt van $g_3(x)$ en $f(x)$ uitrekenen. Hiervoor kun je de formule uit de vorige opgave gebruiken. Je vult daarvoor $n = 3$ in in de afgeleide formule.

$$x = \frac{\ln 3}{3-1} = \frac{1}{2}\ln 3$$

Je moet nu de volgende integraal uitrekenen.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} (g_3(x) - f(x))\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \left(\frac{24x}{e^{3x}} - \frac{8x}{e^x}\right) dx$$

Deze integraal is met de technieken van de middelbare school niet uit te rekenen, dus je moet dit met je GR doen. Op de Ti-84 plus voer je de volgende formule in:

$$y_1 = \frac{24x}{e^{3x}} - \frac{8x}{e^x}$$

Nu reken je met calc $\int f(x)\,dx$ deze integraal uit. Je vindt dan voor de oppervlakte een waarde van ongeveer 0,46.