Dozen

13. De doos is een balk, dus de inhoud van de doos is gelijk aan lengte·breedte·hoogte. Aangezien de bodem vierkant is, geldt lengte=breedte. Lengte en breedte zijn beide gelijk aan $b - 2x$. Dit is eenvoudig uit figuur 1 te halen. In de opgave staat dat de hoogte gelijk is aan x. Er geldt nu (Ik noem de inhoud I):

$$I = l \cdot b \cdot h$$
$$I = (b - 2x) \cdot (b - 2x) \cdot x$$
$$I = (b^2 - 4bx + 4x^2)x$$
$$I = b^2x - 4bx^2 + 4x^3$$

14. Stel dat voor $x = \frac{1}{6}b$ de waarde van $I(x)$ maximaal is, dan moet gelden dat voor $x = \frac{1}{6}b$ de afgeleide van $I(x)$ gelijk is aan 0. Het is slim om eerst die afgeleide te berekenen:

$$I(x) = 4x^3 - 4bx^2 + b^2x$$
$$I'(x) = 12x^2 - 8bx + b^2$$

Nu kijk je of deze afgeleide gelijk is aan 0 voor $x = \frac{1}{6}b$. Dit doe je door dit gewoon in te vullen:

$$I'\left(\frac{1}{6}b\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{6}b\right)^2 - 8b \cdot \frac{1}{6}b + b^2$$
$$I'\left(\frac{1}{6}b\right) = \frac{12}{36}b^2 - \frac{8}{6}b^2 + b^2$$
$$I'\left(\frac{1}{6}b\right) = 0b^2$$
$$I'\left(\frac{1}{6}b\right) = 0$$

Je ziet dat $I(x)$ inderdaad een maximum heeft bij $x = \frac{1}{6}b$.