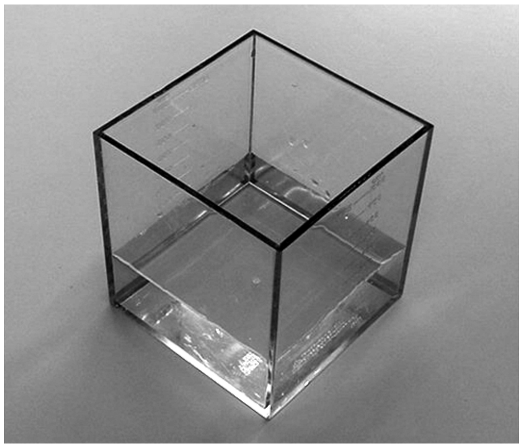
Verschuivend zwaartepunt

Een kubusvormige bak met deksel heeft binnenmaten 10 bij 10 bij 10 cm en weegt 1 kilogram.
Het zwaartepunt B van de bak ligt in het centrum van de bak, dus 5 cm boven het midden van de bodem.

De bak wordt met water gevuld tot een hoogte van h cm.
Het zwaartepunt W van het water (de bak niet meegerekend) ligt in het centrum van het water, dus $\frac{1}{2}h$ cm boven het midden van de bodem.
Zie de foto en figuur 1 waarin op schaal een vooraanzicht van de bak is getekend.

foto

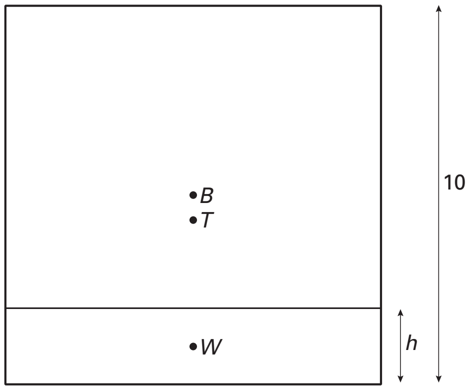


Het zwaartepunt van het geheel (bak en water samen) noemen we T.
Het punt T ligt op het lijnstuk BW.
Er geldt:

$$d_T = \frac{h}{h+10} \cdot d_W + \frac{10}{h+10} \cdot d_B$$

Hierbij zijn d_T, d_W en d_B de afstand in cm van achtereenvolgens T, W en B tot de bodem.

figuur 1



3p **1** ☐ Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

4p **2** ☐ Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h, geldt: $d_T = \dfrac{h^2+100}{2h+20}$.

Als de bak leeg is, valt T samen met B. Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B.

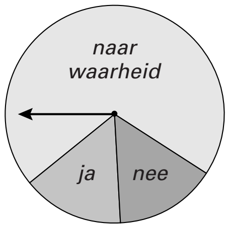
4p **3** ☐ Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4{,}5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

6p **4** ☐ Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.

Pestgedrag

Om meer te weten te komen over het pestgedrag op een school wordt er een onderzoek gedaan. Aan elke leerling die aan het onderzoek meedoet, wordt de volgende vraag gesteld: *pest jij wel eens?* Omdat het onderwerp gevoelig ligt, zal niet elke pester naar waarheid willen antwoorden. Daarom laat men de leerlingen antwoorden volgens de methode van *randomized response*. Deze methode werkt als volgt: er wordt gebruik gemaakt van een kansschijf die verdeeld is in de sectoren *ja* (15%), *nee* (15%) en *naar waarheid* (70%). Zie figuur 2.

figuur 2



De leerling laat de wijzer van de kansschijf draaien. De wijzer komt tot stilstand in een willekeurige positie. Als de wijzer tot stilstand komt in de sector *naar waarheid*, moet de leerling eerlijk antwoorden. Als de wijzer in één van de andere sectoren komt, moet de leerling verplicht antwoorden wat die sector aangeeft, ongeacht of hij wel of niet pest.

4p **5** ☐ Bereken de kans dat van 7 leerlingen er 5 naar waarheid moeten antwoorden en 2 verplicht met „ja”. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

Leerlingen die het antwoord „ja” geven, doen dat om één van de volgende redenen:

- de wijzer komt in de sector „*ja*” dus antwoorden ze verplicht „ja”

of

- de wijzer komt in de sector „*naar waarheid*” en ze pesten wel eens.

Aan het onderzoek doen 900 leerlingen mee.
Neem bij de volgende vraag aan dat 20% van deze leerlingen wel eens pest.

4p **6** ☐ Toon aan dat dan naar verwachting 261 leerlingen „ja” zullen antwoorden.

Bij de telling blijkt dat 311 leerlingen de vraag met „ja” hebben beantwoord. Dit doet vermoeden dat het percentage leerlingen dat wel eens pest groter is dan 20%.

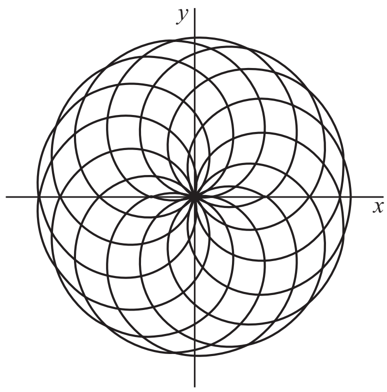
5p **7** ☐ Bereken bij welk percentage leerlingen dat wel eens pest het verwachte aantal antwoorden „ja” 311 is.

Een beweging door (0, 0)

De beweging van een punt in het Oxy-vlak wordt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(15t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(15t) + \sin(2t) \end{cases}$$

figuur 3



In figuur 3 is de baan van het punt getekend.

6p **8** ☐ Bereken de exacte snelheid van het punt op tijdstip $t = 0$.

De bewegingsvergelijkingen kunnen herleid worden tot:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos(8\tfrac{1}{2}t) \\ y(t) = r(t) \cdot \sin(8\tfrac{1}{2}t) \end{cases} \quad \text{met } r(t) = 2\cos(6\tfrac{1}{2}t)$$

4p **9** ☐ Toon dit aan.

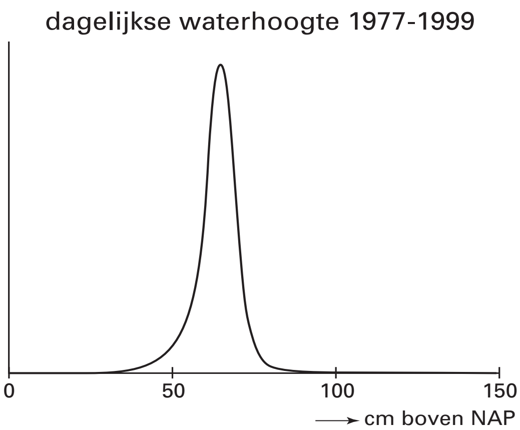
Bij het doorlopen van de baan van figuur 3 voor $0 \leq t \leq 2\pi$ passeert het punt een aantal keren (0, 0).

6p **10** ☐ Bereken dit aantal langs algebraïsche weg.

Hoogwater in Groningen

Op 26 oktober 1999 verscheen in dagblad *Trouw* een artikel over de waterhoogte in het Verbindingskanaal in Groningen. De aanleiding hiervoor was de waterschade aan het Groninger Museum, dat in dit kanaal staat.
De grafiek in figuur 4 is ontleend aan dit artikel. Het is de frequentieverdeling van de meetresultaten van 8145 dagen in de jaren 1977–1999.

figuur 4



De waterhoogte (in cm boven NAP) in het Verbindingskanaal noemen we X.
Op basis van de meetresultaten veronderstellen we dat X normaal verdeeld is met gemiddelde 63,8 cm. Van de 8145 gemeten waterhoogten was 6% onder de 50,0 cm. Hieruit volgt dat de standaardafwijking van X ongeveer 9 cm is.

4p **11** ☐ Bereken op grond van bovenstaande gegevens de standaardafwijking van X in één decimaal nauwkeurig.

Uit de statistiek is bekend dat het gemiddelde van een steekproef uit deze meetresultaten ook normaal verdeeld is met $\mu = 63{,}8$ en $\sigma = \dfrac{9}{\sqrt{n}}$, waarbij n het aantal meetresultaten in de steekproef is.
Lettend op de neerslag en de verdamping is december de natste maand in Groningen. Om te onderzoeken of de waterhoogte in december significant hoger is dan 63,8 berekent men het gemiddelde G van de 22 waterhoogten op 15 december van de jaren 1977 tot en met 1998.

7p **12** □ Bereken bij welke gehele waarden van G men bij een significantieniveau van 5% mag concluderen dat de gemiddelde waterhoogte in december groter is dan 63,8 cm.

Bal te water

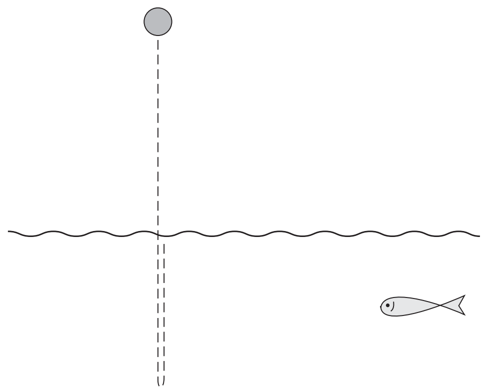
Een bal valt van enige hoogte in het water. Vanaf het moment dat de bal het wateroppervlak raakt, wordt hij afgeremd. Door zijn snelheid zal hij nog een stuk onder het wateroppervlak komen. Vervolgens zal de bal weer opstijgen naar het wateroppervlak. Zie figuur 5.
Voor de snelheid v, in meters per seconde, van een bepaalde bal die in het water valt, geldt de formule:

$$v(t) = 2 - 8e^{-2t}$$

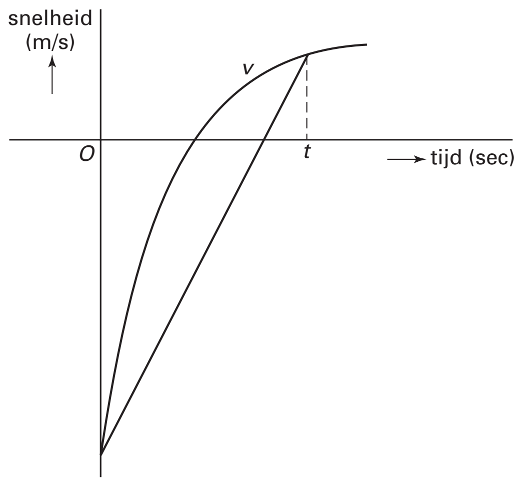
Hierbij is t de tijd in seconden vanaf het moment dat de bal in het water komt; v is positief als de bal omhoog gaat.
Deze formule geldt alleen zolang de bal onder water is. Ter vereenvoudiging verwaarlozen we de diameter van de bal.

In figuur 6 staat de grafiek van v voor de periode dat de bal onder water is.
De gemiddelde versnelling (in m/s^2) van de bal tijdens de eerste t seconden dat hij onder water is, is gelijk aan de helling van het verbindingslijnstuk tussen de punten op de grafiek van v die horen bij de tijdstippen 0 en t. In figuur 6 is dit lijnstuk voor een waarde van t getekend.

figuur 5



figuur 6



4p **13** □ Bereken de gemiddelde versnelling in m/s^2 gedurende de eerste 2 seconden. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De bal bereikt het diepste punt na ongeveer 0,7 seconden.

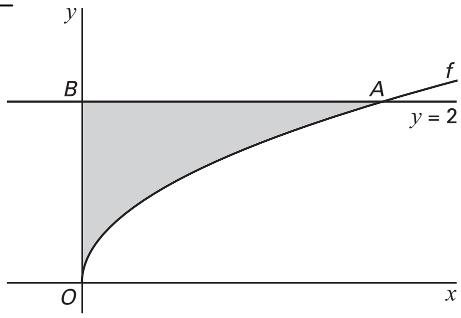
5p **14** □ Bereken het exacte tijdstip waarop de bal op het diepste punt is.

Het aantal meters dat de bal zich op een bepaald tijdstip onder het wateroppervlak bevindt, kun je berekenen door de snelheid te integreren.

4p **15** □ Bereken de grootste diepte die de bal bereikt. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Een kromme van middens

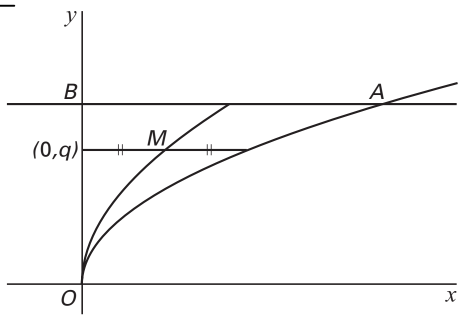
figuur 7



Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$.
De lijn $y = 2$ snijdt de grafiek van f in punt A en de y-as in punt B. Zie figuur 7.
V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = 2$.
In figuur 7 is V grijs gemaakt.

4p **16** ☐ Bereken de oppervlakte van V.

figuur 8



We bekijken het horizontale verbindingslijnstuk tussen een punt $(0, q)$ en de grafiek van f, met $0 < q \leq 2$.
M is het midden van dit lijnstuk.
In figuur 8 is dit voor een waarde van q getekend. Hierin is ook de kromme $y = \sqrt{2x}$ getekend.

4p **17** ☐ Toon aan dat M op de grafiek van $y = \sqrt{2x}$ ligt.

W is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sqrt{2x}$, de y-as en de lijn $y = 2$.
We wentelen de gebieden V en W beide om de y-as.
De inhoud van het omwentelingslichaam van V is gelijk aan $\frac{32}{5}\pi$. De inhoud van het omwentelingslichaam van W is een percentage hiervan.

6p **18** ☐ Bereken dit percentage exact.