OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
verschilregel	$s(x)=f(x)-g(x)$	$s'(x)=f'(x)-g'(x)$
productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^{g}\log(a)+{}^{g}\log(b)={}^{g}\log(ab)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log(a)-{}^{g}\log(b)={}^{g}\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log\left(a^{p}\right)=p\cdot{}^{g}\log(a)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^{g}\log(a)=\dfrac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Zonnepanelen[1)]

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. Op een dergelijke website tref je de volgende tekst aan:

> Omdat de elektriciteitsprijs voortdurend stijgt, kan investeren in zonnepanelen interessant zijn. Laten we om te beginnen eens uitgaan van een stijging van de elektriciteitsprijs van 5% per jaar. Verder gaan we uit van een zonnepanelen-installatie met een opbrengst van 1750 kWh (kilowattuur) elektriciteit per jaar en een aanschafprijs van € 2995.

Verder wordt er op de website gerekend met een elektriciteitsprijs van € 0,225 per kWh voor het eerste jaar na de aanschaf van de zonnepanelen en vervolgens met een jaarlijkse toename van de elektriciteitsprijs van 5%.

Om de opbrengst in euro's te berekenen, wordt op diezelfde website gerekend met de prijs die de eigenaar van de zonnepanelen zou moeten betalen als hij de elektriciteit van een elektriciteitsbedrijf zou moeten kopen.

Met behulp van deze gegevens is het mogelijk een formule op te stellen van de vorm $Z = a \cdot b^{t-1}$ met Z de opbrengst in euro's van de zonnepanelen in jaar t. Hierbij is $t = 0$ het moment van aanschaf van zonnepanelen.

4p **1** Bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.

noot 1 Deze gehele opgave is gebaseerd op gegevens zoals die in 2013 bekend waren.

Voor het vervolg van deze opgave gaan we **niet** meer uit van een jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs maar van een **vaste** prijs van € 0,225 per kWh.
In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een ander bedrijf.

tabel

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie[2)] van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

De **terugverdientijd** is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten.
In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

4p **2** Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend.

Als je de panelen zelf installeert, is de aanschafprijs lager. De aanbieder rekent dan € 1300 vaste kosten voor het systeem en € 325 per paneel. De elektriciteitsopbrengst van de panelen verandert niet bij een doe-het-zelfsysteem.
Als je 10 of meer panelen koopt, is de overheidssubsidie € 650. Voor T, de terugverdientijd in jaren, heeft de aanbieder de volgende formule opgesteld:

$$T = \frac{650 + 325x}{46{,}9x}$$

met x het aantal panelen dat aangeschaft wordt en $x \geq 10$.

4p **3** Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide van T voor $x \geq 10$ dat de terugverdientijd daalt als je meer panelen aanschaft.

Voor de aanschaf van 9 panelen of minder van een doe-het-zelfsysteem geldt een andere formule omdat de overheidssubsidie dan 15% van de aanschafprijs is. De aanschafprijs bestaat uit de vaste kosten plus de kosten per paneel.

4p **4** Stel een formule op voor de terugverdientijd T in jaren en x het aantal zonnepanelen voor $x \leq 9$.

noot 2 In 2013 werd er door de overheid subsidie verstrekt bij het aanschaffen van zonnepanelen

Eén miljard hartslagen

Een veelgehoorde bewering is dat het hart van zoogdieren gedurende hun leven ongeveer een miljard keer slaat. We gaan dat in deze opgave onderzoeken.

Een zeker hondenras heeft een gemiddelde hartslag van 125 slagen per minuut. Met behulp van de bewering kun je dan de gemiddelde levensduur van dit ras berekenen.

2p **5** Bereken zo de gemiddelde levensduur in jaren van dit hondenras.

Naar aanleiding van deze bewering kan een formule voor het verband tussen de hartslag en de levensverwachting opgesteld worden:

$$H = \frac{1900}{L}$$

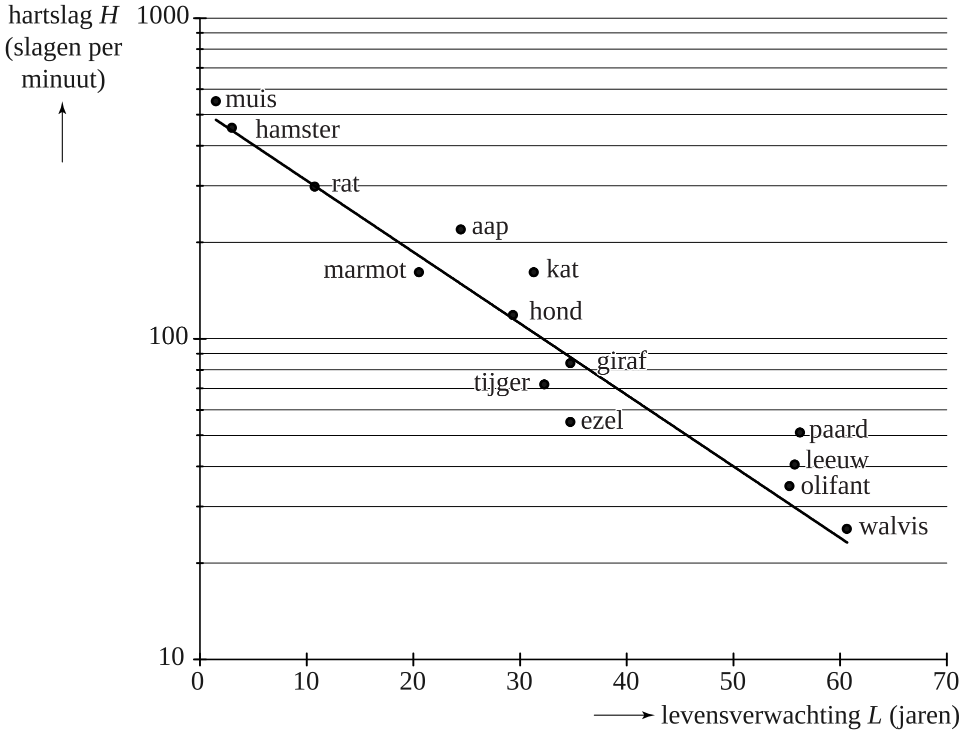
Hier is L de levensverwachting (in jaren) en H de hartslag (in slagen per minuut).

4p **6** Toon aan dat deze formule uit de veelgehoorde bewering volgt.

4p **7** Stel de formule van de afgeleide van H op en beredeneer aan de hand van deze formule dat H afnemend dalend is.

Bij controle blijkt dat er dieren zijn waarvoor de formule ongeveer klopt, maar ook dieren waar de formule helemaal niet voor klopt, zoals de aap en de muis. In werkelijkheid is het verband anders. In de figuur is de hartslag van een aantal soorten zoogdieren uitgezet tegen hun levensverwachting. Langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

figuur



De punten die de hamster en de walvis weergeven, liggen nagenoeg op de getekende rechte lijn. De walvis heeft een levensverwachting van 60 jaar en een hartslag van 25 slagen per minuut. De hamster heeft een levensverwachting van 3 jaar en een hartslag van 450 slagen per minuut.

Het verband tussen H (de hartslag in slagen per minuut) en L (de levensverwachting in jaren) is (bij benadering) exponentieel en is dus te schrijven als:

$$H = b \cdot g^L$$

Uit de grafiek volgt dat b bij benadering 520 is en g bij benadering 0,95.

4p **8** Bereken met behulp van de gegevens van de hamster en de walvis g in drie decimalen en b in gehelen.

Met de formule $H = 520 \cdot 0{,}95^L$ kun je de hartslag berekenen als je de levensverwachting weet. Logischer is het om de levensverwachting te berekenen als je van een zoogdier de hartslag gemeten hebt.
Daarom willen we de formule $H = 520 \cdot 0{,}95^L$ herleiden tot de vorm:

$$L = a \cdot \log(H) + b$$

5p **9** Voer deze herleiding uit. Geef a en b in 2 decimalen nauwkeurig.

De formule van Riegel en kilometertijden

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. Die formule luidt als volgt:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1{,}07}$$

T_1 is de tijd, uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2. De afstanden d_1 en d_2 zijn allebei in meters. De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42 195 meter, de marathon.

Harald loopt de 1500 meter in 4 minuten en 52 seconden.

3p **10** Bereken in minuten en seconden Haralds te verwachten tijd op de 10 000 meter.

Als je voor d_1 en d_2 de afstanden in een andere eenheid dan meters zou invullen, dan geeft de formule dezelfde uitkomst.

2p **11** Leg zonder getallenvoorbeeld uit waarom de uitkomst die de formule geeft inderdaad niet verandert als je de beide afstanden in kilometers in plaats van meters invult.

Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Dat is ook in overeenstemming met de formule: als de afstand tweemaal zo groot wordt, dan geldt volgens de formule van Riegel dat de gemiddelde snelheid altijd met hetzelfde percentage afneemt.

5p **12** Bereken dit percentage.

Een andere maat voor de snelheid is de **kilometertijd** K, het aantal seconden dat een hardloper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In formulevorm:

$$K = \frac{T}{d}$$

Hierbij is T de totale tijd in seconden en d de afstand in kilometers.

Als we naar de wereldrecords op de langere loopafstanden kijken, dan blijken de kilometertijden heel goed te voorspellen te zijn met de formule van Riegel. Dat is opmerkelijk want die afstanden werden door verschillende hardlopers gelopen.

Het wereldrecord op de 1500 meter is precies 3 minuten en 26 seconden[1)]. Uitgaande van dit wereldrecord kunnen de tijden voor de wereldrecords op de andere afstanden met behulp van de formule van Riegel berekend worden met $T = 206 \cdot \left(\frac{d}{1{,}5}\right)^{1{,}07}$. In deze formule is T de gelopen tijd in seconden voor het wereldrecord op de afstand d km.

Met behulp van deze formule en de formule $K = \frac{T}{d}$ is het mogelijk een formule op te stellen voor de kilometertijden van de wereldrecords in de vorm:

$$K = p \cdot d^q$$

Hierbij is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometers.

4p **13** Bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Een variant van de formule van Riegel met een nog onbekende exponent a kan ook gebruikt worden bij schaatsen. Die formule ziet er dan als volgt uit:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^a$$ (met de tijden in seconden en de afstanden in meters)

Een schaatsliefhebster gebruikte eind 2015 de wereldrecords op de 5000 meter en de 10 000 meter om de waarde van de exponent a te berekenen.
Op de 5000 meter was eind 2015 het wereldrecord 6 minuten en 3,32 seconden. Het wereldrecord op de 10 000 meter was op dat moment 12 minuten en 36,30 seconden.

4p **14** Bereken de waarde van a in drie decimalen nauwkeurig op basis van deze twee wereldrecords.

noot 1 Dit record geldt sinds 1998. In deze opgave gaan we ervan uit dat dit record nog steeds geldt.

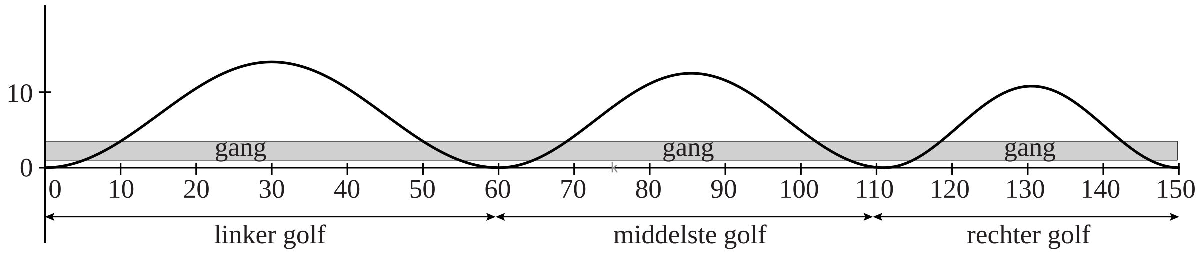
Zentrum Paul Klee

Op de foto's zie je het Zentrum Paul Klee in Zwitserland. Het gebouw heeft een bijzondere vorm: het bestaat uit drie afdelingen met daaroverheen een golvend dak.

foto's

De drie afdelingen zijn verbonden door een lange gang. In figuur 1 zie je een schematische doorsnede van het gebouw en de lange gang. In deze figuur is duidelijk te zien dat het dak bestaat uit drie golven met verschillende periodes. Ook de hoogtes zijn verschillend.

figuur 1



Elke golf begint en eindigt op een laagste punt. Voor de linker golf in de figuur kan men de volgende formule opstellen:

$$h = 7 + 7\sin\left(\frac{2\pi}{60}(x - 15)\right)$$

Hierin is h de hoogte van de golf boven het laagste punt in meter en x de horizontale afstand in meter vanaf het beginpunt van deze golf.

De vloer van de gang bevindt zich 1 meter boven het laagste punt van de golven. De gang zelf is 3,5 meter hoog.

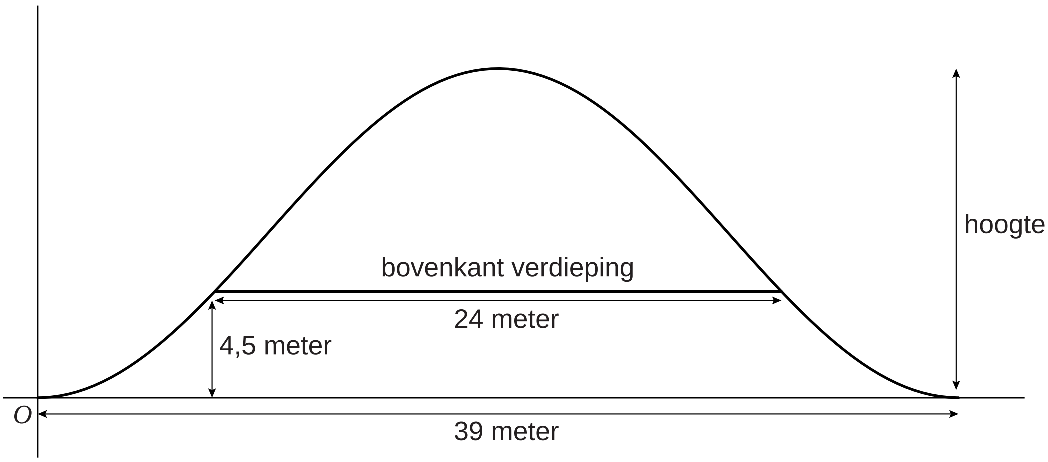
4p **15** Bereken de lengte van het gedeelte van de gang dat zich geheel onder het linker dak, dus onder de linker golf, bevindt in cm nauwkeurig.

De golf die hoort bij het middelste dak is 51 meter lang en 12,5 meter hoog. Hier hoort een formule bij van de vorm $h = a + a\sin\big(c(x-d)\big)$ met h de hoogte van de golf in meter boven het laagste punt en x de horizontale afstand in meter vanaf het beginpunt van de linker golf.

4p **16** Bereken de waarden van a, c en d in deze formule.

We kijken nu naar het rechter dak. Om de afmetingen hiervan te berekenen, kan de architect bijvoorbeeld als volgt te werk gaan. Hij gaat voor het dak uit van een sinusoïde met een periode van 39 meter. Verder wil hij dat onder het dak een benedenverdieping past van 24 meter breed en 4,5 meter hoog. In figuur 2 is de doorsnede getekend die bij deze situatie hoort. De golf begint linksonder in het punt met coördinaten (0,0). Figuur 2 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

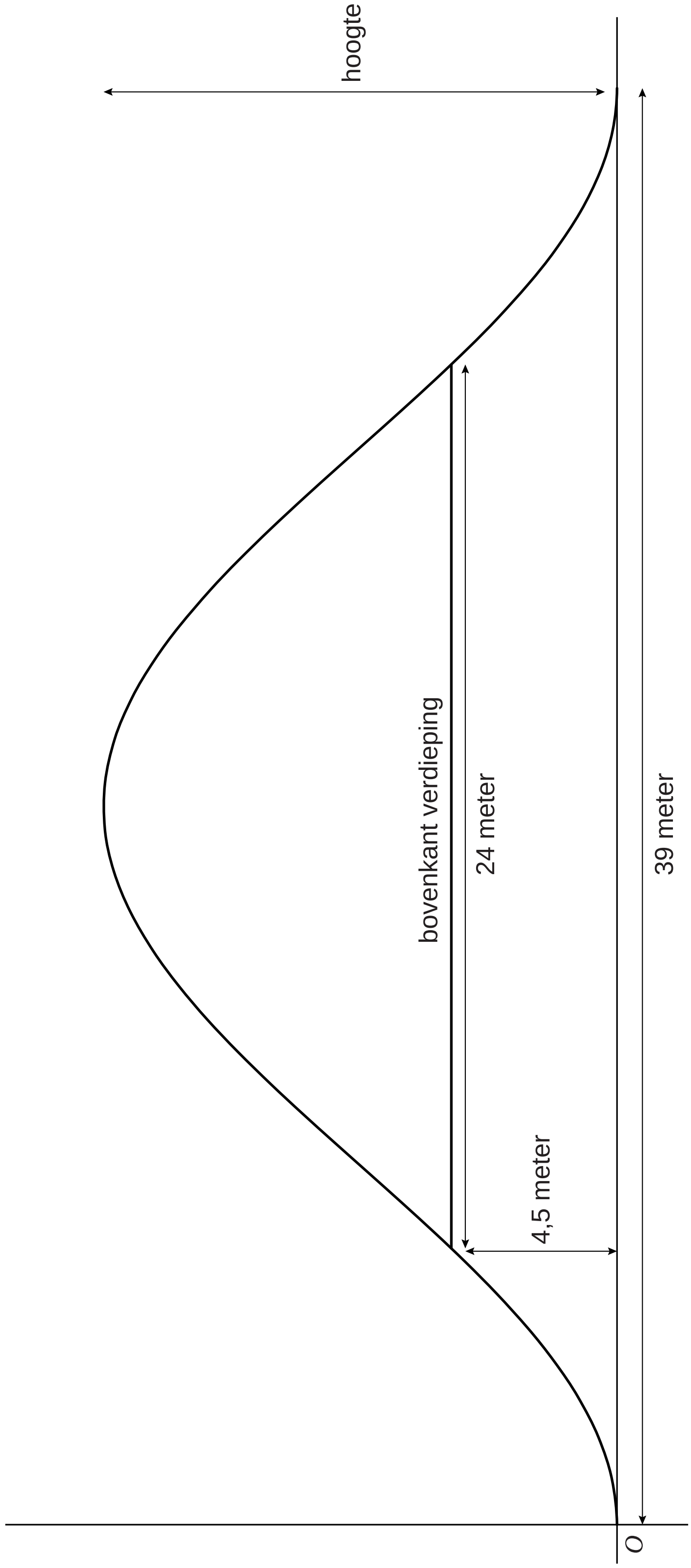
figuur 2



5p **17** Bereken, eventueel gebruikmakend van de uitwerkbijlage, welke hoogte de architect nu minimaal moet nemen voor de golf die hoort bij het dak in deze situatie. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.

uitwerkbijlage

17



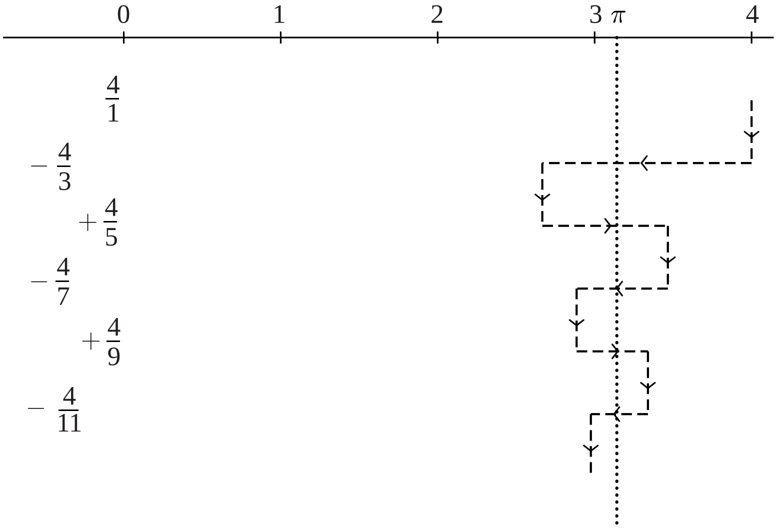
Pi in het oude India

In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.
Hij begon met 4. Dat is groter dan π. Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π. Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π.
Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\ldots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichter bij het getal π. Zie de figuur.

figuur



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichter bij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π. Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π.

3p **18** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \ldots$
De directe formule voor deze rij is van de vorm:

$$u_n = \frac{a \cdot (-1)^{n-1}}{b \cdot (n-1)+1} \text{ met } n = 1, 2, 3, \ldots$$

3p **19** Bepaal de waarden van a en b in deze directe formule.

Madhava gaf ook een andere benaderingsaanpak. Hierbij leidde de somrij sneller tot een goede benadering van π dan bij zijn eerste methode. Ook bij die andere aanpak werd er beurtelings iets afgetrokken en iets opgeteld.
Die andere aanpak van Madhava zag er als volgt uit:

$$S_1 = \sqrt{12} \cdot 1$$

$$S_2 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right)$$

$$S_3 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2}\right)$$

$$S_4 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right)$$

$$S_5 = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}\right)$$

enzovoort.

5p **20** Stel de recursieve formule op voor de somrij S_n met $n = 2, 3, 4, ...$ en $S_1 = \sqrt{12}$ van de andere benaderingsaanpak van Madhava.

Benzine of diesel?

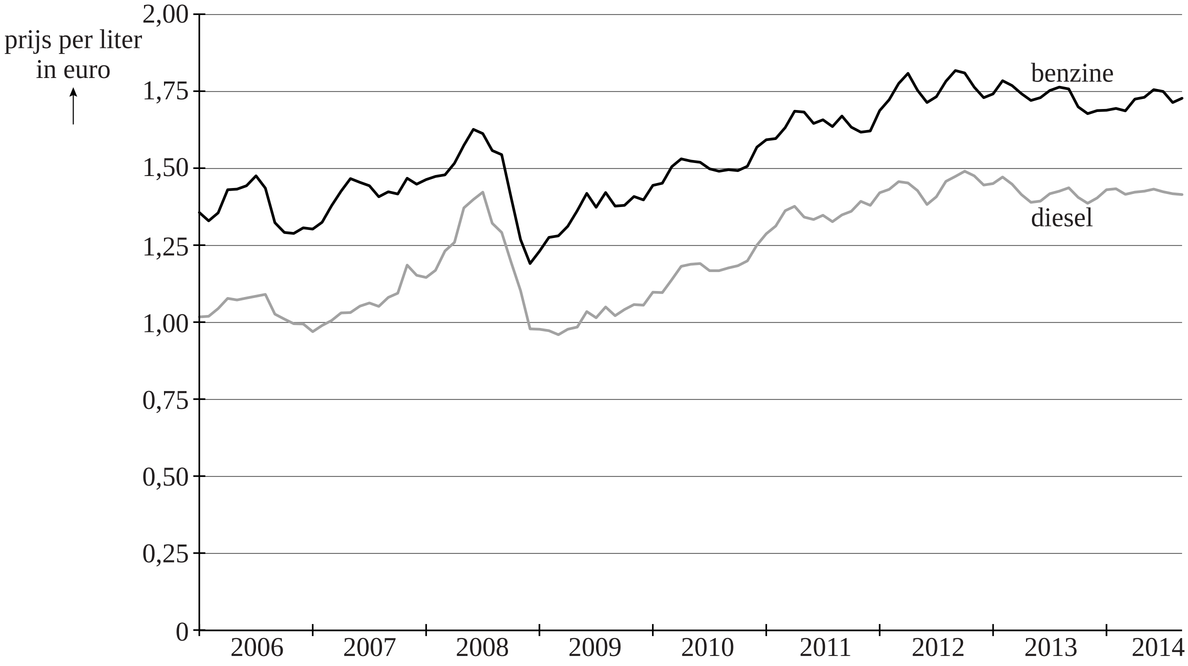
Peter is van plan binnenkort een andere auto aan te schaffen. Hij heeft zijn keuze laten vallen op een Volvo V70 uit 2015, maar twijfelt tussen twee uitvoeringen van deze auto, de **Nordic** en de **Nomadic**. Zie tabel 1.

tabel 1

uitvoering	brandstof	gewicht (kg)	verbruik (liter per 100 km)
Nordic	benzine	1595	6,4
Nomadic	diesel	1655	4,5

De Nordic rijdt op benzine, terwijl de Nomadic op diesel rijdt. Het voordeel van een auto die op diesel rijdt, is dat die auto een stuk zuiniger is: niet alleen kan een dieselauto meer kilometers per liter brandstof rijden, diesel is ook nog eens een stuk goedkoper dan benzine. Zie de figuur.

figuur



In de figuur is duidelijk te zien dat de prijzen voor brandstof sinds 2012 redelijk stabiel zijn. Op het moment dat Peter over zijn auto-aanschaf nadenkt, is de verwachting dat dit in de toekomst zo zal blijven.

Het nadeel van auto's op diesel is dat de wegenbelasting voor deze auto's veel hoger is dan die voor auto's die op benzine rijden. Zie tabel 2.

tabel 2: wegenbelasting per 3 maanden

gewichtsklasse	benzine	diesel	aardgas
1451−1550	€ 218	€ 406	€ 318
1551−1650	€ 242	€ 442	€ 355
1651−1750	€ 265	€ 478	€ 393

Peter gaat ervan uit dat de overige kosten, zoals verzekering en onderhoud, bij beide uitvoeringen gelijk zullen zijn. Peter houdt in de vergelijking geen rekening met het eventuele verschil in aanschafkosten tussen beide uitvoeringen.

Omdat rijden op diesel voordeliger is dan rijden op benzine, zal de dieseluitvoering vanaf een bepaald aantal kilometers per jaar voordeliger zijn dan de benzine-uitvoering.

7p **21** Onderzoek met behulp van de gegevens vanaf welk aantal kilometers per jaar de dieseluitvoering voordeliger zal zijn dan de benzine-uitvoering. Rond je antwoord af op honderden kilometers.