OVERZICHT FORMULES

**Kansrekening**

Voor toevalsvariabelen $X$ en $Y$ geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen $X$ en $Y$ geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van $n$ onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som $S$ en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten $X$:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\quad\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\quad\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

**Binomiale verdeling**

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele $X$, waarbij $n$ het aantal experimenten is en $p$ de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k$ = 0, 1, 2, 3, …, $n$

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ $\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

**Normale verdeling**

Voor een toevalsvariabele $X$ die normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu$ en standaardafwijking $\sigma$ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

**Differentiëren**

| naam van de regel | functie | afgeleide |
|---|---|---|
| somregel | $s(x)=f(x)+g(x)$ | $s'(x)=f'(x)+g'(x)$ |
| productregel | $p(x)=f(x)\cdot g(x)$ | $p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ |
| quotiëntregel | $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| kettingregel | $k(x)=f(g(x))$ | $k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\cdot\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ |

**Logaritmen**

| **regel** | **voorwaarde** |
|---|---|
| ${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$ | $g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$ |
| ${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$ | $g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$ |
| ${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$ | $g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$ |
| ${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$ | $g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$ |

## Asperges

Vooral in Zuid-Nederland worden asperges als groente geteeld. Uit aspergezaad groeien aspergeplanten en als deze voldoende gegroeid zijn, worden de asperges geoogst.

De prijs van het zaad is € 4500 per kg. Per hectare groeien ongeveer 20 000 aspergeplanten. Hiervoor is ongeveer 750 gram zaad nodig. Een aspergeplant levert in een oogstseizoen gemiddeld twintig asperges. In één kilo gaan gemiddeld tien asperges. De gemiddelde opbrengst van één kilo asperges is € 4.

4p **1** Bereken het verschil van de gemiddelde opbrengst per hectare en de kosten voor het benodigde zaad.

De geoogste asperges worden op basis van kleur en dwarsdoorsnede gesorteerd. In deze opgave bekijken we witte asperges met een dwarsdoorsnede van 10 tot 38 mm. Een aspergeteler heeft in een week in mei 20 000 asperges geoogst en daarna gesorteerd. In tabel 1 staan de aantallen per klasse weergegeven.

**tabel 1**

| klasse | dwarsdoorsnede (in mm) | frequentie |
|---|---|---|
| C1 | 10-<12 | 1600 |
| B1 | 12-<16 | 4000 |
| A1 | 16-<20 | 4500 |
| AA1 | 20-<28 | 8800 |
| AAA1 | 28-<38 | 1100 |

5p **2** Zet de gegevens uit tabel 1 uit op het normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage en toon daarmee aan dat de dwarsdoorsneden van de geoogste asperges van deze aspergeteler bij benadering normaal verdeeld zijn.

We nemen vanaf nu aan dat we de dwarsdoorsneden van asperges mogen benaderen met de normale verdeling met $\mu = 20{,}1$ mm en $\sigma = 5{,}6$ mm. Zoals in tabel 1 te zien is, verdelen we de asperges in vijf klassen.
We kunnen nu het percentage asperges in klasse AA1 berekenen met behulp van de normale benadering, maar ook met behulp van de gegevens uit tabel 1.

4p **3** Bereken deze beide percentages. Rond je antwoord af op hele percentages.

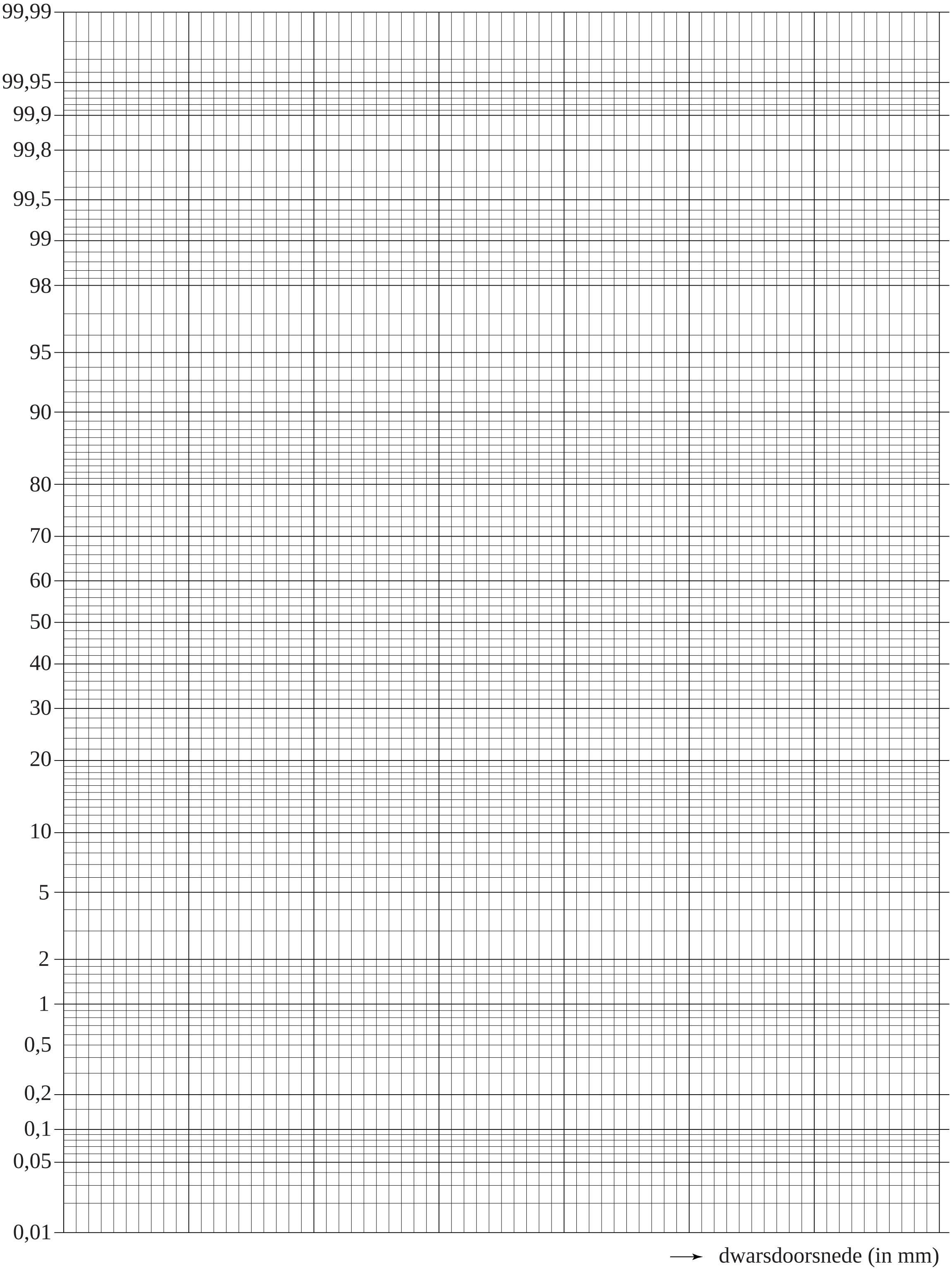
Op een ochtend oogst een andere aspergeteler 200 asperges. Neem weer aan dat de dwarsdoorsneden van asperges benaderd mogen worden met de normale verdeling met $\mu = 20{,}1$ mm en $\sigma = 5{,}6$ mm.

5p **4** Bereken hoe groot de kans is dat er van de 200 geoogste asperges minstens 50 in klasse A1 zitten.

## uitwerkbijlage

**2**

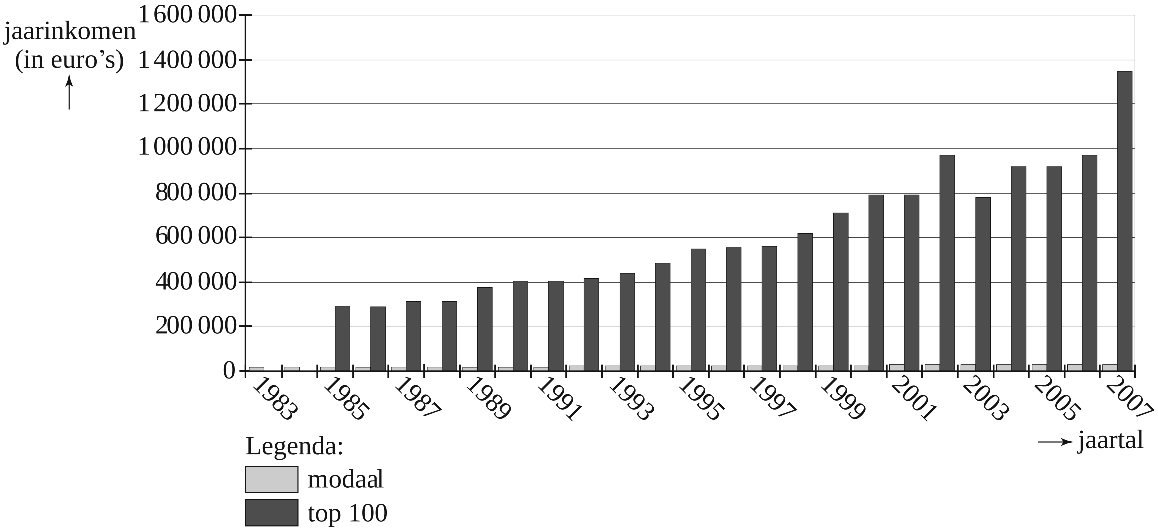
Normaal waarschijnlijkheidspapier



## Topinkomens

Op 17 mei 2008 stond in de Volkskrant een artikel waarin gesteld werd dat de salariskloof tussen topbestuurders en gewone werknemers in Nederland steeds groter wordt. Bij het artikel was een figuur afgedrukt waarin het gemiddelde van de 100 topinkomens en het modale inkomen in de periode 1983-2007 te zien waren. Zie figuur 1. Alle bedragen in deze figuur zijn jaarinkomens in euro's.

**figuur 1**




De Volkskrant stelt dat in de periode 1983-2007 de inkomens van topbestuurders elk jaar met gemiddeld 7,2% zijn gestegen. In figuur 1 staan geen gegevens over topinkomens in 1983 en 1984 omdat die toen nog niet openbaar waren.
In 1985 was het gemiddelde van de 100 topinkomens € 295 000.

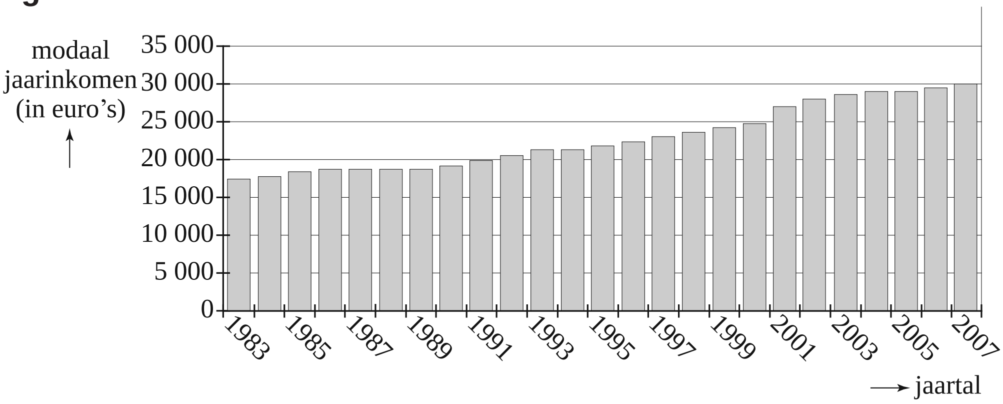
Uitgaande van het bedrag voor 1985 levert een gemiddelde groei van 7,2% per jaar inderdaad ongeveer het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens op zoals dit in figuur 1 bij 2007 af te lezen is.

4p **5** Bereken dit gemiddelde jaarsalaris en vergelijk je antwoord met het gemiddelde jaarsalaris dat in figuur 1 af te lezen is.

In figuur 1 is ook te zien dat het gemiddelde topinkomen in 2007 aanzienlijk hoger was dan in 2006. In 2006 was het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens € 980 000. Als men met de gegevens van 1985 en 2006 berekent met hoeveel procent het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens gestegen is, komt men niet uit op 7,2% per jaar maar op een lager percentage.

4p **6** Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig.

**figuur 2**




De kleine staafjes van het modale jaarinkomen uit figuur 1 zijn in figuur 2 nogmaals weergegeven. Het modale jaarinkomen is een maat voor het salaris van de "gewone werknemer": veel mensen verdienen een salaris dat rond dit bedrag ligt. In 1983 verdiende een topbestuurder uit de top-100 gemiddeld 16 keer zoveel als het modale inkomen en in 2007 gemiddeld 44 keer zoveel.

4p 7 Toon aan dat het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens in 2007 ongeveer 5 keer zo hoog was als in 1983.

Ook binnen de 100 topinkomens zijn nog grote verschillen. In 2004 was het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens € 910 000. Het gemiddelde jaarsalaris van de 25 hoogste inkomens uit deze groep was € 1 720 000.

4p 8 Onderzoek of de 25 topbestuurders met de hoogste inkomens gemiddeld meer dan drie keer zoveel verdienen als het gemiddelde van de rest van de bestuurders uit deze top-100.

Op de website van de Volkskrant kan iemand laten berekenen hoeveel hij zou verdienen als zijn salaris de afgelopen 25 jaar evenveel gestegen was als dat van topbestuurders. Op de website staat de onderstaande tekst:

**tekst 1**

> Hoe hoog zou jouw topsalaris moeten zijn? Kruip in de huid van een topbestuurder en doe net alsof je salaris in de afgelopen 25 jaar even hard opliep als het inkomen van de hoogste baas. Vul je huidige salaris in en zie wat je eigenlijk had moeten verdienen. Voor het gemak is ervan uitgegaan dat je er de afgelopen 25 jaar net als Jan Modaal maar 2,3 procent per jaar aan salarisverhoging bij hebt gekregen, terwijl Jan Top er jaarlijks 7 procent op vooruitging.

Bij ieder salaris dat je invult als huidig salaris geeft de website een salaris als antwoord. Dit antwoord is het salaris dat je zou verdienen als je salaris even snel gestegen zou zijn als dat van topbestuurders. Het blijkt dat de website dan als antwoord een salaris geeft dat ongeveer 3 maal zo hoog is als je huidige salaris.

4p 9 Bereken in twee decimalen nauwkeurig hoeveel maal zo hoog het antwoord van de website is.

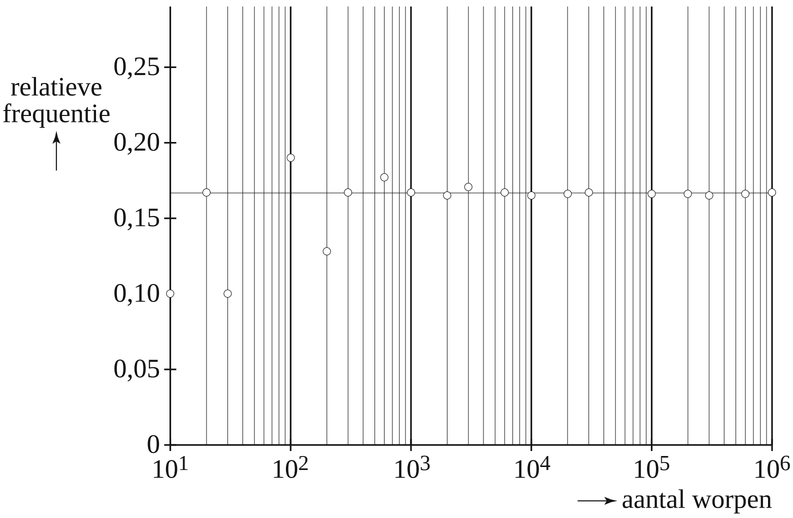
## Zuivere dobbelsteen?

Op de foto zie je twee ronde dobbelstenen. Op deze dobbelstenen staan aantallen ogen van 1 tot en met 6, net als op gewone dobbelstenen. Een ronde dobbelsteen is hol met binnenin een stalen kogeltje. Bij elk getal zit in de holle binnenkant een soort kuiltje waar het kogeltje in past. Aan het einde van een worp komt het kogeltje in zo'n kuiltje terecht. Hierdoor blijft de dobbelsteen liggen, bijvoorbeeld met de vier onder en de drie boven: er is dan drie gegooid.

**foto**

Of een dobbelsteen zuiver is of niet, kun je onderzoeken door er een groot aantal keer mee te gooien. Dit wordt geïllustreerd door figuur 1. In figuur 1 is het resultaat te zien van een aantal simulaties van het gooien met een zuivere dobbelsteen. Er werd hierbij alleen gekeken naar het aantal drieën.

**figuur 1**




Elk cirkeltje stelt het resultaat van een simulatie voor. Langs de horizontale as is het aantal worpen bij een simulatie uitgezet op een logaritmische schaalverdeling. Langs de verticale as staat de relatieve frequentie van het aantal drieën dat hierbij gegooid is. In figuur 1 is bijvoorbeeld te zien dat bij de simulatie van 10 worpen de relatieve frequentie 0,1 is: er is precies één keer een drie gegooid.

Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage. Bij een simulatie van 60 worpen is 4 keer een drie gegooid.

3p **10** Teken het punt dat bij deze simulatie hoort in de figuur op de uitwerkbijlage.
Licht je werkwijze toe.

In figuur 1 is de verwachte relatieve frequentie aangegeven met een horizontale lijn op een hoogte van ongeveer 0,167. Dit komt overeen met kans $\frac{1}{6}$. Het punt dat hoort bij de simulatie van 200 worpen ligt dichter bij deze horizontale lijn dan het punt dat hoort bij de simulatie van 30 worpen. Bij de simulatie van 200 worpen is het verschil tussen de verwachte en de werkelijke relatieve frequentie dus kleiner.
We kunnen ook kijken naar de verschillen bij het **aantal** geworpen drieën. Rik beweert dat het verschil tussen het werkelijke en het verwachte aantal geworpen drieën bij de simulatie van 200 worpen kleiner is dan bij de simulatie van 30 worpen.

5p **11** Onderzoek of Rik gelijk heeft.

Als het aantal gesimuleerde worpen groter wordt, komen de punten van de simulaties steeds dichter bij de horizontale lijn te liggen. De resultaten van de simulaties benaderen de werkelijke kans van $\frac{1}{6}$ dan steeds beter.
Dit is ook theoretisch te berekenen.
Het aantal geworpen drieën bij een simulatie van $n$ keer gooien is voor grote waarden van $n$ te benaderen met een normale verdeling. Hiermee kan men berekenen dat voor een simulatie van 10 000 worpen geldt: de kans dat de relatieve frequentie van het aantal geworpen drieën minder dan 1% van $\frac{1}{6}$ verschilt, is ongeveer 0,35.
Voor een simulatie van 100 000 worpen is deze kans veel groter.

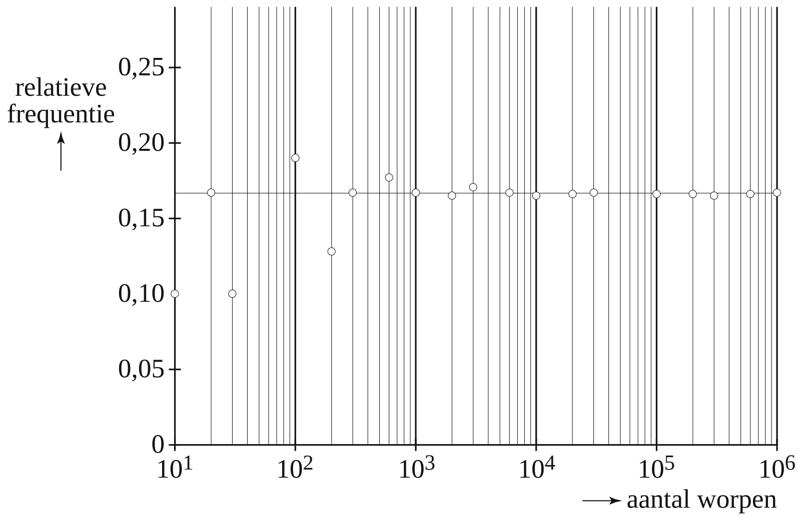
6p **12** Laat dit met een berekening zien.

Jesse vermoedt dat de kans om met zijn ronde dobbelsteen drie te gooien kleiner is dan $\frac{1}{6}$. Na het zien van figuur 1 besluit hij om 600 keer met zijn ronde dobbelsteen te gooien om dit te onderzoeken. Na 600 keer gooien heeft hij 87 keer drie gegooid.

6p **13** Onderzoek of Jesse op grond van dit steekproefresultaat mag concluderen dat de kans om met deze dobbelsteen drie te gooien kleiner is dan $\frac{1}{6}$. Neem een significantieniveau van 5%.

## uitwerkbijlage

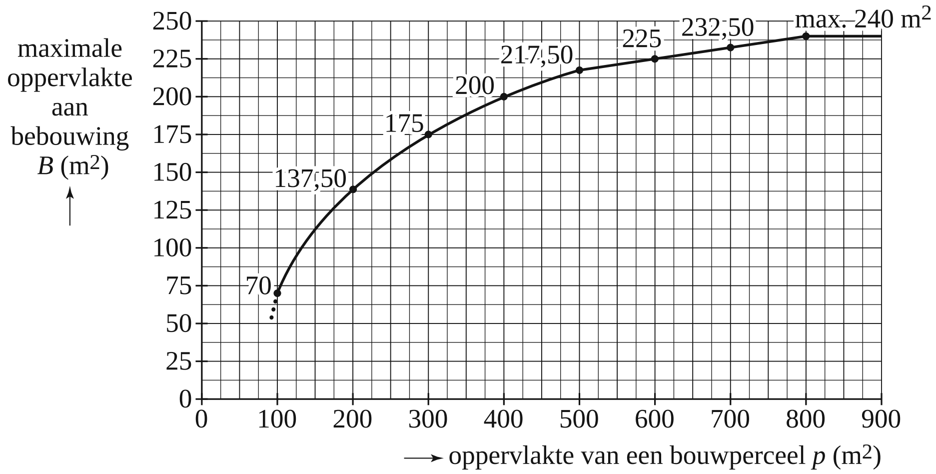
**10**



## Bouwgrafiek

Bij nieuwbouw stellen gemeentes bestemmingsplannen op om onder meer te voorkomen dat een nieuwe wijk een rommelig aanzicht krijgt.
In het bestemmingsplan voor de wijk “Den Brabander fase 2” van de gemeente Alphen-Chaam is de grafiek van figuur 1 opgenomen.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

**figuur 1**




In de nieuwe wijk wordt een aantal bouwpercelen verkocht. Een **bouwperceel** is een stuk grond waarvan een gedeelte bebouwd mag worden. In figuur 1 kun je aflezen hoeveel vierkante meter bij een bepaalde oppervlakte van een bouwperceel maximaal bebouwd mag worden.
Voorbeeld: van een bouwperceel met een oppervlakte van 300 m$^2$ mag maximaal 175 m$^2$ bebouwd worden.

Mevrouw Groen koopt een bouwperceel van 20 bij 20 meter. Zij wil precies de maximaal toegestane oppervlakte aan bebouwing gebruiken voor een vierkant huis. Op de overige grond wil zij rondom het huis grindpaden van 3 meter breed aanleggen.

4p **14** Onderzoek of dit te realiseren is.

Een architectenbureau hanteert als vuistregel dat van een bouwperceel maximaal 20 m$^2$ meer dan de helft van de oppervlakte bebouwd zou mogen worden. In formulevorm:

$$B = 0{,}5p + 20$$

Hierin is $B$ de maximale oppervlakte aan bebouwing in m$^2$ en $p$ de oppervlakte van een bouwperceel in m$^2$.

3p **15** Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage om te bepalen vanaf welke perceelgrootte de regeling die is weergegeven in figuur 1 strenger is dan deze vuistregel.

De bouwpercelen zijn minstens 100 $m^2$ groot. Voor bouwpercelen van 500 $m^2$ tot 800 $m^2$ neemt de maximale bebouwing lineair toe. Van geen enkel bouwperceel mag meer dan 240 $m^2$ bebouwd worden. De grafiek in figuur 1 bestaat dus uit drie delen: van 100 tot 500, van 500 tot 800 en vanaf 800.

De drie delen van de grafiek in figuur 1 kunnen we elk karakteriseren met een beschrijving uit de volgende lijst:

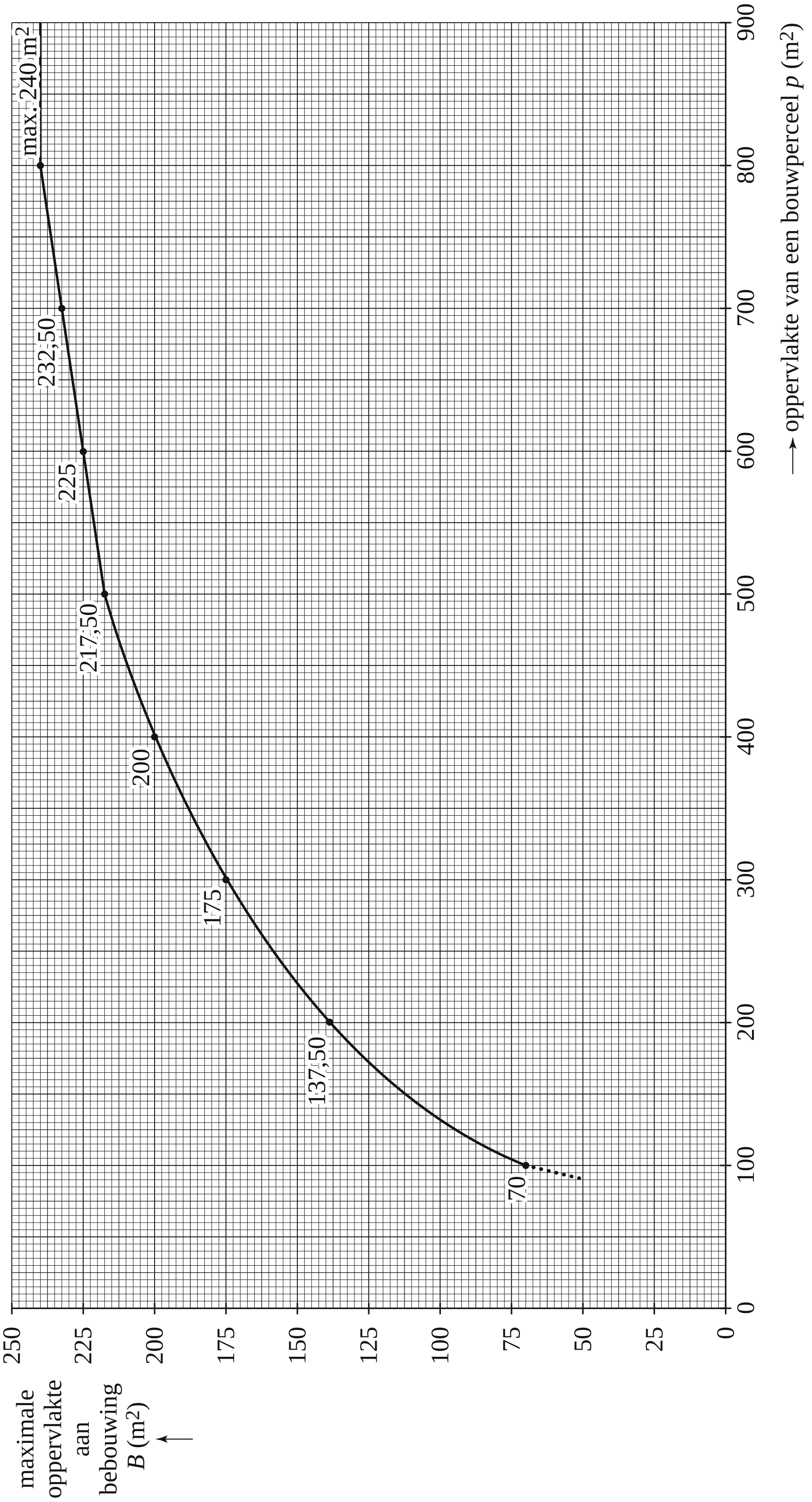
– toenemend stijgend
– constant stijgend
– afnemend stijgend
– constant
– afnemend dalend
– constant dalend
– toenemend dalend.

Tussen 100 en 500 is de grafiek afnemend stijgend, van 500 tot 800 constant stijgend en vanaf 800 constant.
Met behulp van figuur 1 kunnen we ook een grafiek tekenen van de oppervlakte die minimaal **onbebouwd** moet blijven. Ook de drie delen van deze nieuwe grafiek kunnen we karakteriseren met behulp van bovenstaande lijst.

4p **16** Geef voor elk van de drie delen van de nieuwe grafiek een karakterisering. Geef een toelichting.

## uitwerkbijlage

**15**

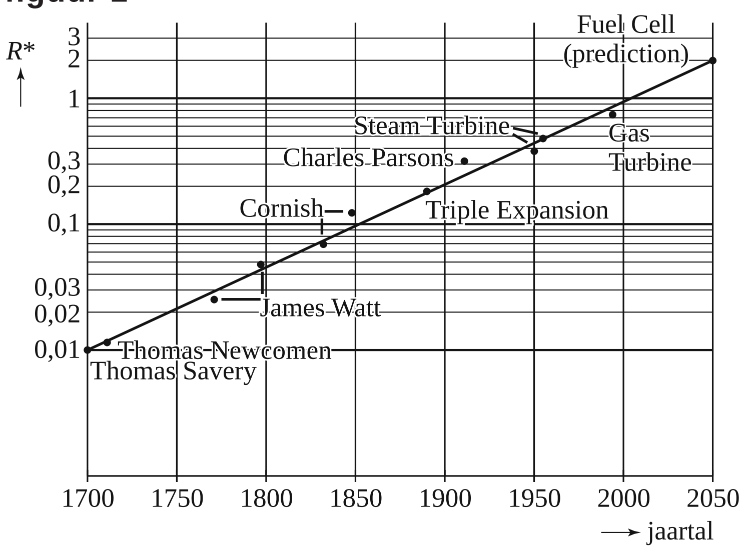


## Energie

Een machine, zoals een automotor, gebruikt energie in de vorm van brandstof. Een machine levert ook energie, maar de hoeveelheid geleverde energie is altijd kleiner dan de hoeveelheid energie die erin wordt gestopt. Wanneer de hoeveelheid energie die een machine levert 30% is van de hoeveelheid energie die erin wordt gestopt, spreken we van een machine met een **rendement** $R = 0{,}3$. De resterende 70% energie gaat verloren, bijvoorbeeld in de vorm van warmte. Het rendement is daarom altijd kleiner dan 1.

Aan het einde van de vorige eeuw schreef de Amerikaanse onderzoeker J. Ausubel een artikel met de titel ‘Can technology spare the earth?’. Daarin beschrijft hij de ontwikkeling van nieuwe machines die een hoger rendement hebben en waarmee dus veel brandstof bespaard kan worden. In het artikel van Ausubel komt een grafiek voor die de ontwikkeling van het rendement van een aantal machines weergeeft. Zie figuur 1.

**figuur 1**




Op de verticale as zie je een logaritmische schaalverdeling. Daarmee wordt $R^* = \dfrac{R}{1-R}$ weergegeven. In deze formule is $R$ het rendement van de machine.

Een van de machines uit figuur 1 heeft een rendement van 0,43.

3p **17** Ga met behulp van een berekening na welke machine in figuur 1 hier bedoeld wordt.

De punten in figuur 1 geven een trend aan die met de rechte lijn aangegeven wordt. Het laatste stuk van deze rechte lijn is een voorspelling voor de komende jaren. Zo voorspelt Ausubel een brandstofcel (Fuel Cell) met een hoog rendement. Uit figuur 1 volgt dat hiervoor geldt dat $R^* = 2$.

3p **18** Bereken hoe groot het rendement van deze brandstofcel volgens Ausubel is.

In figuur 1 is niet $R$, maar $R^*$ weergegeven ten opzichte van de tijd. Dit is gedaan omdat de grafiek dan een rechte lijn wordt als op de verticale as een logaritmische schaalverdeling wordt gebruikt. Het gebruik van $R^*$ levert geen problemen op omdat bij elke waarde van $R^*$ precies een waarde van $R$ hoort.

Op grond van de formule $R^* = \dfrac{R}{1-R}$ kunnen we beredeneren dat als $R$ toeneemt van 0 tot 1, $R^*$ dan ook steeds toeneemt.

4p **19** Geef deze redenering.

In figuur 1 is de grafiek van $R^*$ een rechte lijn. Dat betekent dat de formule voor $R^*$ van de vorm $R^* = b \cdot g^t$ is, met $t$ de tijd in jaren en $t = 0$ voor het jaar 1700. Uit figuur 1 lezen we af dat bij 1700 de waarde $R^* = 0{,}01$ hoort en bij 2050 de waarde $R^* = 2$.

3p **20** Bereken de waarden van $b$ en $g$.