

OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

\sqrt{n} -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde \bar{X} van de uitkomsten X :

$$E(S) = n \cdot E(X) \quad \sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$$

$$E(\bar{X}) = E(X) \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X , waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{met } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Verwachting: $E(X) = n \cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ is standaard-normaal verdeeld en } P(X < g) = P\left(Z < \frac{g - \mu}{\sigma}\right)$$

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^s \log a + {}^s \log b = {}^s \log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^s \log a - {}^s \log b = {}^s \log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^s \log a^p = p \cdot {}^s \log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^s \log a = \frac{p \log a}{p \log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

Scores

Op een internetsite kunnen liefhebbers Stepbridge spelen. Elke keer dat je Stepbridge speelt, wordt je prestatie uitgedrukt in een aantal punten. Om prestaties van spelers met elkaar te kunnen vergelijken, laat men hen allemaal onder dezelfde condities dezelfde versie van dit spelletje spelen. Dat noemt men een **spel**.

Daarna worden hun voorlopige scores berekend volgens een methode die hieronder beschreven staat. De laagst mogelijke score is 0, de hoogst mogelijke score is 100 en de gemiddelde score is altijd 50. Zo nodig worden scores afgerond op twee decimalen.

We geven een voorbeeld. Op een bepaald moment hebben acht spelers hetzelfde spel een keer gespeeld. De spelers worden geordend naar hun puntentotalen. In tabel 1 zie je een overzicht van hun rangnummers en hun voorlopige scores.

tabel 1

speler	Karin	Mike	Marian	Reza	Loes	William	Ria	Ton
rangnummer	1	2	3	4	5	6	7	8
voorlopige score	100	85,71	71,43	57,14	42,86	28,57	14,29	0

Je ziet in tabel 1 bijvoorbeeld dat Marian, met rangnummer 3, hoger is geëindigd dan vijf van haar zeven concurrenten. Haar voorlopige score wordt daarom $\frac{5}{7} \cdot 100 \approx 71,43$. Voor de anderen zijn de voorlopige scores volgens hetzelfde principe bepaald.

Ditzelfde spel wordt ook gespeeld door een nieuwe speler, Jeanette. Zij is dus de 9e speler, en zij haalt meer punten dan Mike, maar minder dan Karin.

3p 1 Bereken de voorlopige score van Jeanette.

Als spelers evenveel punten behalen, krijgen ze dezelfde voorlopige score: het gemiddelde van de scores die ze zouden krijgen als ze na elkaar geëindigd waren. Dus als Mike en Marian in de situatie van tabel 1 evenveel punten behaald zouden hebben, zouden zij allebei een voorlopige score van $(\frac{85,71 + 71,43}{2} =) 78,57$ gehad hebben.

Een ander spel is door negen spelers gespeeld. Zie tabel 2.

tabel 2

speler	Ali	Ben	Chris	Dirk	Eva	Fred	Ger	Hans	Isa
rangnummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
punten	300	300	200	180	180	180	70	50	0
voorlopige score			75,00					12,50	0

5p 2 Bereken de ontbrekende voorlopige scores.

Eindexamen vwo wiskunde A 2012 - II

Nadat 21 spelers hetzelfde spel hebben gespeeld, veranderen de voorlopige scores voor dat spel niet meer en deze worden dan definitieve scores.

- 4p **3** Onderzoek of het mogelijk is dat een speler een definitieve score van precies 52 haalt.

Als de voorlopige scores van een serie van 30 spellen van een speler definitief zijn geworden, wordt het gemiddelde van die 30 scores voor de speler genoteerd als eindscore voor die serie.

Johan is een fanatieke Stepbridger. Hij heeft zijn prestaties enkele jaren bijgehouden. In die tijd speelde hij 719 series van 30 spellen. Johan scoorde 360 keer een eindscore tussen 46,00 en 54,00 en 173 keer een eindscore boven de 54,00. Hij heeft dus 186 keer onder de 46,00 gescoord. Zijn eindscores voor deze 719 series zijn bij benadering normaal verdeeld.

Johan schat het gemiddelde van zijn 719 eindscores op 50,00. Hij gebruikt het feit dat hij 360 keer een eindscore tussen de 46,00 en 54,00 gehaald heeft om de daarbij horende standaardafwijking te berekenen.

- 5p **4** Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

In werkelijkheid was het gemiddelde van de 719 eindscores 49,73 en de standaardafwijking 5,91.

Als de eindscores precies zouden voldoen aan de normale verdeling, zou Johan niet 173 keer hoger dan 54,00 gescoord hebben, maar een kleiner aantal.

- 4p **5** Bereken dit aantal.

Woordenschat

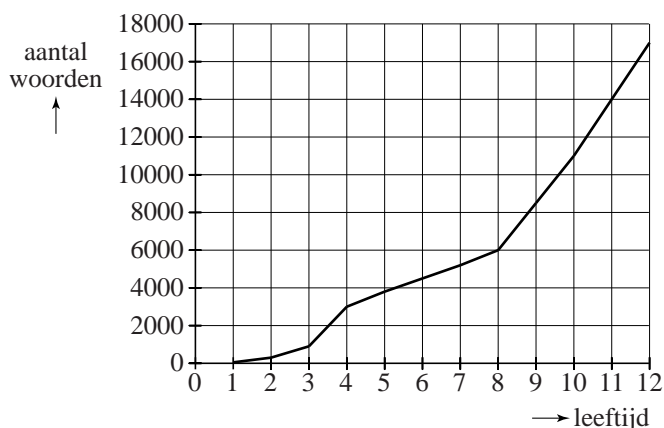
De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat. Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken. In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17 000 woorden.

In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven. De figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur

gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland



Uit de figuur blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

- 4p **6** Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17 000 op de 12e verjaardag. Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren: Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45 000 tot 150 000.

Bij sommige jongeren spreken we van een **hoge** woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150 000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$$W_h = 17000 \cdot 1,27^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

- 3p **7** Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een **lage** woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45 000 op hun 21e verjaardag. Hiervoor geldt de volgende formule:

$$W_l = at + b$$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17 000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van de formule $W_l = at + b$ kan de woordenschat die jongeren met een lage woordenschat op hun 18e verjaardag hebben, berekend worden. Vervolgens kan met behulp van de formule $W_h = 17000 \cdot 1,27^t$ worden berekend hoeveel maanden **eerder** jongeren met een hoge woordenschat deze zelfde woordenschat zullen hebben.

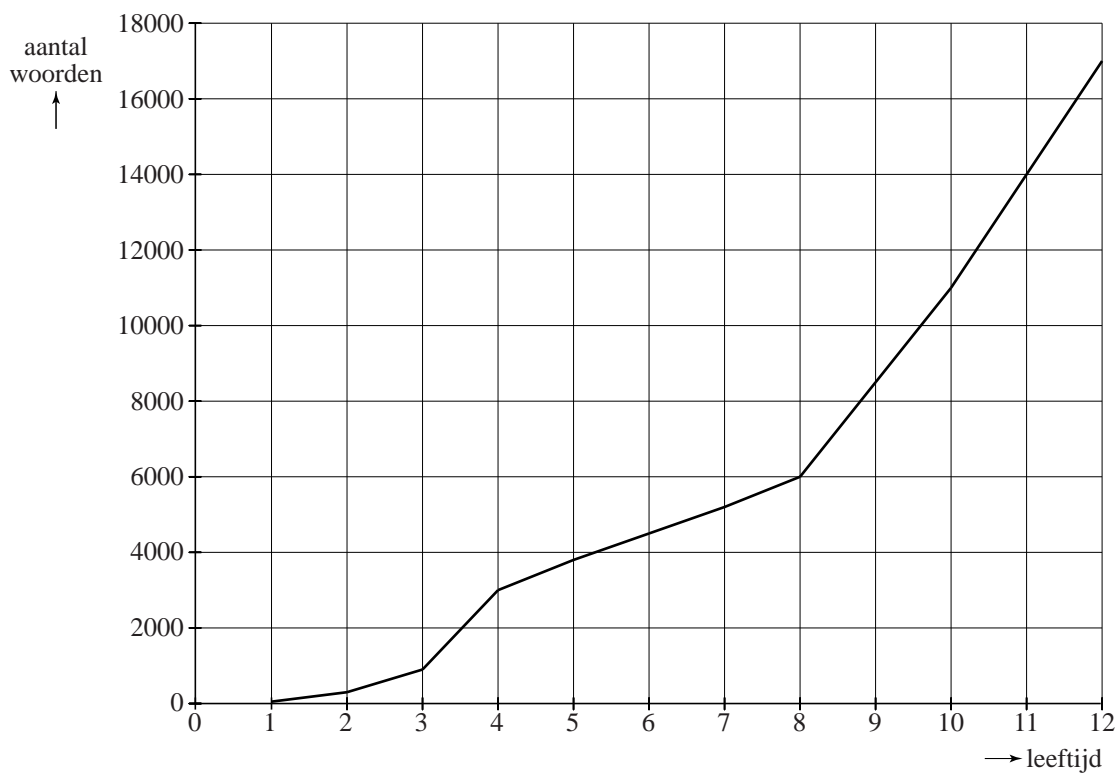
- 6p **8** Bereken dit aantal maanden.

In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt. Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule $W_h = 17000 \cdot 1,27^t$ (met $t = 0$ op de 12e verjaardag).

- 3p **9** Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

uitwerkbijlage

6



De loting voor de Vietnamoorlog

In de vorige eeuw voerden de Verenigde Staten van Amerika een oorlog in Vietnam.

De militairen die men in 1970 voor deze oorlog nodig had, werden in december 1969 door loting aangewezen. Alle mannen die geboren waren in de jaren 1944 tot en met 1950 lootten mee.



Vanwege het grote belang voor de gehele Amerikaanse bevolking werd de loting rechtstreeks op televisie uitgezonden.

Drie vrienden, alle drie geboren in de jaren 1944 tot en met 1950, gaan de uitzending op televisie bekijken om te zien hoe de loterij voor hen uitpakt. Stel dat in een aselechte trekking $\frac{1}{3}$ deel van de mannen geboren in de jaren 1944 tot en met 1950 wordt opgeroepen en de rest niet.

- 3p **10** Bereken de kans dat precies één van de drie vrienden wordt opgeroepen.

Bij de loting van 1969 werden kaartjes met daarop de dagen van het jaar (inclusief 29 februari) als loten in een vaas gedaan, en daar één voor één weer uit getrokken.

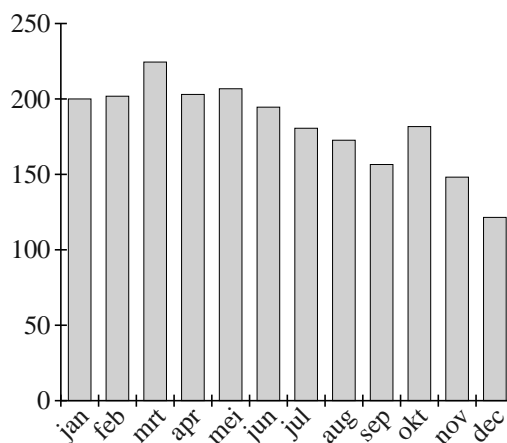
De als eerste getrokken dag was 14 september: die kreeg nummer 1. De als tweede getrokken dag was 24 april, die kreeg nummer 2, enzovoort. De laatst getrokken dag, 8 juni, kreeg nummer 366.

De mannen die jarig waren op dag nummer 1 werden als eersten opgeroepen, vervolgens degenen die jarig waren op de dag met nummer 2, enzovoort.

Niet veel later schreef de krant de New York Times dat de loting niet eerlijk kon zijn geweest: de dagen in de laatste zes maanden van het jaar hadden vaker lage nummers dan die in de eerste zes maanden van het jaar.

Dit wordt geïllustreerd door het staafdiagram in de figuur hiernaast. In dit staafdiagram is bijvoorbeeld te zien dat het gemiddelde van de nummers die de dagen van de maand januari bij de loting kregen, 200 is.

figuur



In de figuur is te zien dat de zes laagste gemiddelden in de laatste zes maanden van het jaar vallen.

Als de loting eerlijk was, dan zou de kans klein zijn dat de zes laagste gemiddelden in de laatste zes maanden van het jaar vallen. Deze kans kun je als volgt berekenen: stel je een vaas voor met twaalf ballen, waarop de maanden van het jaar vermeld staan. Uit deze vaas trek je zes ballen. De gevraagde kans is dan de kans dat je de zes ballen trekt waarop de laatste zes maanden van het jaar vermeld staan.

4p **11** Bereken deze kans.

Voor de loting van het jaar 1970 werd een andere procedure bedacht. Bij deze loting werden de nummers 1 tot en met 365 gebruikt, omdat hier geloot werd uit de mannen die geboren zijn in 1951.

Het verwachte gemiddelde van de lotnummers in een maand is 183. Neem aan dat bij een eerlijke loting voor elke dag geldt dat de kans op een lotnummer onder 183 gelijk is aan $\frac{182}{365}$.

In de tabel op de uitwerkbijlage staan de uitkomsten van de loting van 1970.

De maand januari bleek veel lotnummers onder 183 te krijgen.

7p **12** Onderzoek of het aantal dagen van de maand januari met een lotnummer onder 183 significant hoger is dan het aantal dagen dat je zou verwachten. Neem een significantieniveau van 1%.

uitwerkbijlage

12 loting van 1970

jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
133	335	14	224	179	65	104	326	283	306	243	347
195	354	77	216	96	304	322	102	161	191	205	321
336	186	207	297	171	135	30	279	183	134	294	110
99	94	117	37	240	42	59	300	231	266	39	305
33	97	299	124	301	233	287	64	295	166	286	27
285	16	296	312	268	153	164	251	21	78	245	198
159	25	141	142	29	169	365	263	265	131	72	162
116	127	79	267	105	7	106	49	108	45	119	323
53	187	278	223	357	352	1	125	313	302	176	114
101	46	150	165	146	76	158	359	130	160	63	204
144	227	317	178	293	355	174	230	288	84	123	73
152	262	24	89	210	51	257	320	314	70	255	19
330	13	241	143	353	342	349	58	238	92	272	151
71	260	12	202	40	363	156	103	247	115	11	348
75	201	157	182	344	276	273	270	291	310	362	87
136	334	258	31	175	229	284	329	139	34	197	41
54	345	220	264	212	289	341	343	200	290	6	315
185	337	319	138	180	214	90	109	333	340	280	208
188	331	189	62	155	163	316	83	228	74	252	249
211	20	170	118	242	43	120	69	261	196	98	218
129	213	246	8	225	113	356	50	68	5	35	181
132	271	269	256	199	307	282	250	88	36	253	194
48	351	281	292	222	44	172	10	206	339	193	219
177	226	203	244	22	236	360	274	237	149	81	2
57	325	298	328	26	327	3	364	107	17	23	361
140	86	121	137	148	308	47	91	93	184	52	80
173	66	254	235	122	55	85	232	338	318	168	239
346	234	95	82	9	215	190	248	309	28	324	128
277		147	111	61	154	4	32	303	259	100	145
112		56	358	209	217	15	167	18	332	67	192
60		38		350		221	275		311		126

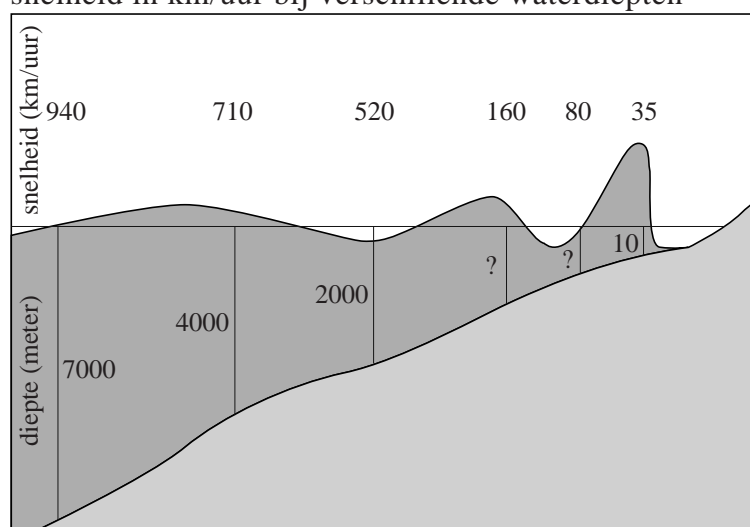
Tsunami

Op 26 december 2004 werd Zuidoost-Azië getroffen door een tsunami. Een tsunami is één heel lange golf die bij de kust heel hoog wordt. De tsunami had rampzalige gevolgen voor een aantal kustgebieden. Dit kwam door de enorme hoeveelheid water die door deze tsunami werd meegevoerd.

In onderstaande figuur is een schematisch overzicht te zien van het verloop van een tsunami. Boven elke genoemde waterdiepte is steeds de bijbehorende snelheid weergegeven.

figuur

snelheid in km/uur bij verschillende waterdiepten



In de figuur is bijvoorbeeld te zien dat een tsunami bij een diepte van 4000 meter zich met een snelheid van 710 km/uur verplaatst.

Voor de snelheid van een tsunami geldt bij benadering de volgende formule:

$$v = 11,3\sqrt{d}$$

Hierin is v de snelheid in km/uur en d de waterdiepte in meter.

In de figuur ontbreken twee waarden voor de waterdiepte. Zij zijn aangegeven met een vraagteken.

- 4p **13** Bereken met behulp van bovenstaande formule en de gegevens uit de figuur deze twee ontbrekende waarden.

De tsunami van december 2004 werd veroorzaakt door een aardbeving onder zee, 150 km uit de kust van het Indonesische eiland Sumatra.

De tsunami plantte zich voort door de Golf van Bengalen, waar de zee ongeveer 3 km diep is.

- 3p **14** Bereken hoeveel minuten een tsunami nodig heeft om een afstand van 150 km af te leggen in water van 3 km diep.

In de figuur is ook te zien dat in de buurt van de kust, waar de waterdiepte niet zo groot is, de golfhoogte van een tsunami groter wordt. Op volle zee, waar de waterdiepte groot is, is de golfhoogte niet zo hoog.

Bij tsunami's is het volgende verband gevonden tussen waterdieptes en golfhoogtes:

$$h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^{0,25} \cdot h_1$$

Hierin is h_1 de golfhoogte bij waterdiepte d_1 en h_2 de golfhoogte bij waterdiepte d_2 ; h_1 , d_1 , h_2 en d_2 zijn in meters.

De tsunami van 26 december 2004 ontstond in een gebied met waterdiepte 1 km en golfhoogte 60 cm. Met deze gegevens en de formule $h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^{0,25} \cdot h_1$

kunnen we voor het verdere verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte d en de golfhoogte h beschrijven met de formule:

$$h = 3,37 \cdot d^{-0,25}$$

- 4p **15** Toon dit aan.

Naarmate een golf dichterbij de kust komt, neemt de waterdiepte steeds verder af. Dit is ook in de figuur te zien.

We bekijken de verandering van de golfhoogte. Naarmate een golf dichterbij de kust komt, zal een kleine verandering in waterdiepte een grotere verandering van de golfhoogte tot gevolg hebben.

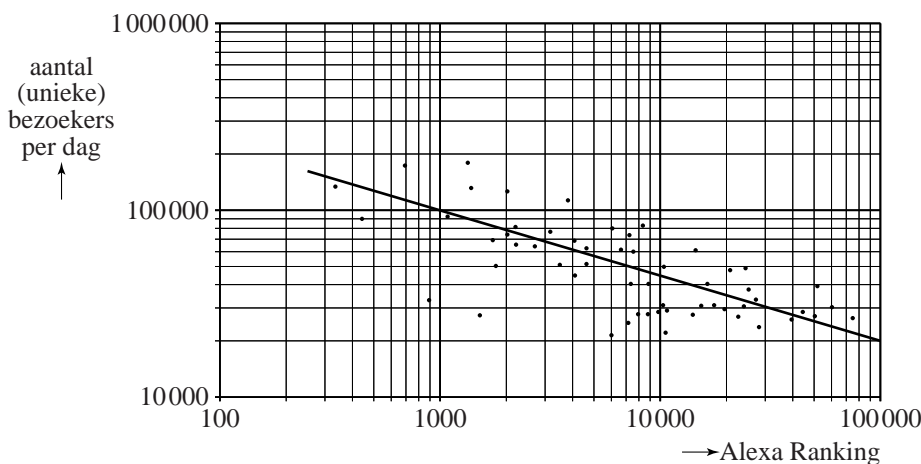
- 4p **16** Laat met behulp van de afgeleide van h zien dat dit inderdaad het geval is.

Websites

Een manier om de populariteit van websites te meten, is door naar de zogenoemde *Alexa Ranking* te kijken. Het internetbedrijf Alexa houdt bij hoe vaak websites bezocht worden, en stelt daarvan een ranglijst op. Zo heeft de website google.com wereldwijd ranking 1 met 1,2 miljard unieke bezoekers per dag (begin 2011).

Voor een aantal Nederlandse websites is het verband tussen de Alexa Ranking en het aantal unieke bezoekers per dag weergegeven in onderstaande figuur. In de figuur is op beide assen gebruik gemaakt van een logaritmische schaalverdeling. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



In de figuur is te zien dat er verschillende websites zijn met een Alexa Ranking tussen de 1000 en de 2000. Het verschil tussen de bijbehorende aantallen unieke bezoekers per dag van deze websites is vrij groot.

- 4p 17 Bereken dit maximale verschil met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage.

De punten in de figuur liggen globaal op een rechte lijn. Deze lijn is in de figuur getekend. Bij deze lijn hoort de formule $B = 1118\,000 \cdot r^{-0,35}$.

Hierin is B het aantal unieke bezoekers per dag en r de Alexa Ranking van de website.

Lang niet bij alle aantallen unieke bezoekers per dag is in de figuur precies af te lezen welke Alexa Ranking de betreffende website heeft. Met de hierboven vermelde formule is deze ranking wel te berekenen.

- 3p 18 Bereken met behulp van de formule de Alexa Ranking van een website met 25 000 unieke bezoekers per dag.

- 3p 19 Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van B daalt.

De formule $B = 1118\,000 \cdot r^{-0,35}$ kan herschreven worden in de vorm $\log B = a + b \cdot \log r$.

- 4p 20 Bereken de waarden van a en b .

uitwerkbijlage

17

