Bingo

Bingo is een populair kansspel. Om te spelen moet een speler een Bingokaart kopen. Deze kaart bevat 5 rijen en 5 kolommen met willekeurige getallen. In het midden van de kaart is geen getal aanwezig. In figuur 1 zie je een voorbeeld van een Bingokaart[1].

figuur 1

B	I	N	G	O
4	18	32	48	71
11	25	45	54	62
13	19		51	67
8	24	39	49	74
1	27	36	59	63

De kolom onder de letter **B** bevat 5 getallen uit de reeks 1 tot en met 15.
De kolom onder de letter **I** bevat 5 getallen uit de reeks 16 tot en met 30.
De kolom onder de letter **N** bevat 4 getallen uit de reeks 31 tot en met 45.
De kolom onder de letter **G** bevat 5 getallen uit de reeks 46 tot en met 60.
De kolom onder de letter **O** bevat 5 getallen uit de reeks 61 tot en met 75.
Elk getal komt niet vaker dan één keer per Bingokaart voor. Op elke Bingokaart staan dus 24 verschillende getallen. In elke kolom staan de getallen niet noodzakelijk op volgorde van grootte. Dus als je in de Bingokaart van figuur 1 bijvoorbeeld de getallen 4 en 11 verwisselt, krijg je een andere Bingokaart.

4p **10** Toon aan dat er ongeveer $5{,}5 \cdot 10^{26}$ verschillende Bingokaarten mogelijk zijn.

Bij Bingo heeft de spelleider een bak met daarin 75 balletjes waarop de getallen 1 tot en met 75 staan. Tijdens een spel Bingo wordt telkens een balletje getrokken. Het getal op dat balletje wordt aan de spelers hardop voorgelezen. Als dat getal op een Bingokaart van een speler staat, kan de speler dat getal doorstrepen. Het getrokken balletje wordt niet teruggedaan in de bak. Zodra een speler alle 24 getallen op een kaart heeft doorgestreept, mag hij ‘BINGO!’ roepen. De speler die als eerste ‘BINGO!’ roept, wint een prijs. Dan is het spel afgelopen en kan een nieuw spel beginnen.

Voor het spel maakt het dus niet uit hoe de getallen in de kolommen staan. In figuur 2 zie je een Bingokaart die is ontstaan door de getallen in elke kolom van de kaart van figuur 1 in een andere volgorde te zetten.

noot 1 We bekijken in deze opgave alleen Bingokaarten van het type zoals hier beschreven. Er worden in werkelijkheid ook andere soorten gebruikt maar die zijn hier niet van belang.

figuur 2

B	I	N	G	O
11	18	39	49	74
4	25	45	51	67
1	19		54	63
8	27	32	48	71
13	24	36	59	62

De speler met de kaart van figuur 2 kan op precies hetzelfde moment ‘BINGO!’ roepen als de speler met de kaart van figuur 1. We zeggen daarom dat de kaart in figuur 2 niet **wezenlijk** verschilt van de kaart van figuur 1.

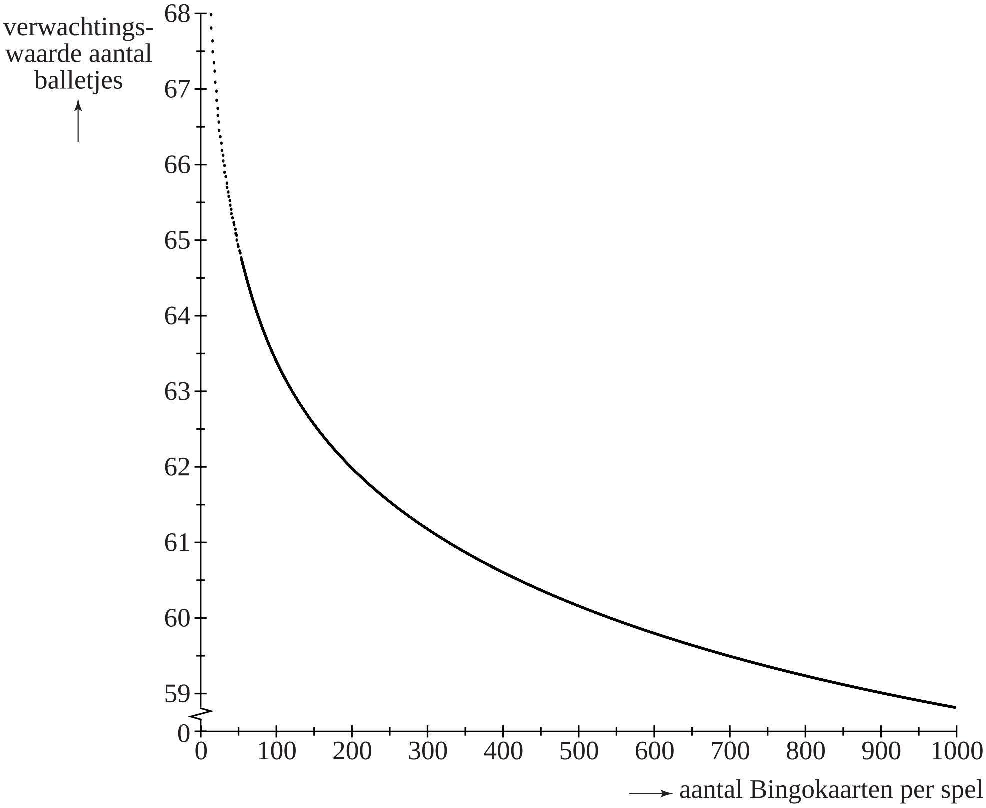
4p **11** Bereken hoeveel verschillende Bingokaarten er kunnen bestaan die wezenlijk van elkaar verschillen.

Als je met één Bingokaart speelt, is de kans vrij klein dat je in 65 of minder trekkingen ‘BINGO!’ mag roepen. Die kans is 0,0154.
In een verzorgingstehuis wordt iedere maandagavond een bingoavond georganiseerd. Deze keer kopen 100 bewoners elk één kaart. Uit ervaring is gebleken dat bij een bingoavond na 65 trekkingen de meeste bewoners echt te moe zijn om zich te kunnen concentreren. Men besluit dus om maar maximaal 65 balletjes te trekken.
Aangezien er nu veel meer mensen meespelen, is de kans dat er binnen 65 trekkingen iemand ‘BINGO!’ zal roepen veel groter.

3p **12** Bereken de kans dat er op de bingoavond in het verzorgingstehuis toch geen prijs kan worden uitgekeerd.

Een spel Bingo wordt meestal met een groot aantal kaarten gespeeld. Dit aantal Bingokaarten per spel noemen we n. Voor elke n kan de verwachtingswaarde worden berekend van het aantal balletjes dat getrokken moet worden voordat de eerste 'BINGO!' wordt geroepen. Het resultaat van deze berekeningen is weergegeven in de grafiek van figuur 3.

figuur 3



Op de horizontale as staat het aantal Bingokaarten per spel en op de verticale as de verwachtingswaarde. In de grafiek kun je aflezen dat er bij een spel met 200 Bingokaarten naar verwachting ongeveer 62 balletjes getrokken moeten worden voordat de eerste 'BINGO!' wordt geroepen.

De grafiek in figuur 3 blijkt zeer goed te kunnen worden benaderd door de volgende formule:

$$verwachtingswaarde = 24 + \frac{50}{n^{0,0524}}$$

Hierbij is n het aantal kaarten dat aan een spel meedoet.
Met behulp van de formule kun je nauwkeurig berekenen hoeveel kaarten er per spel ten minste moeten worden gebruikt zodat naar verwachting 59 of minder balletjes getrokken hoeven te worden voor de eerste 'BINGO!'.

4p **13** Voer deze berekening uit.