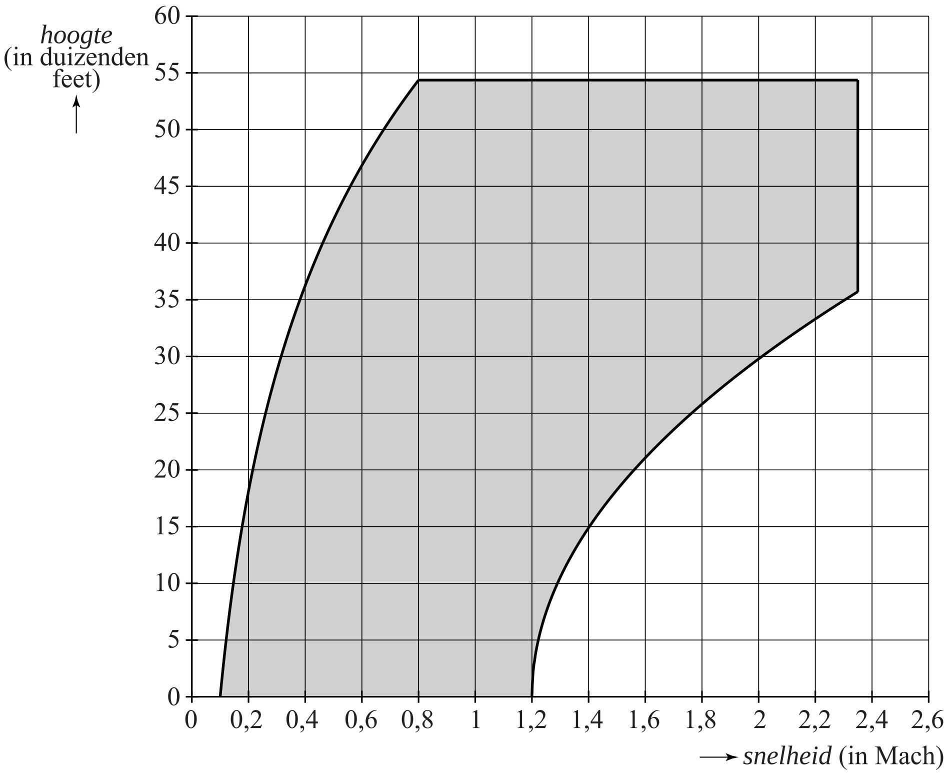
Veilig vliegen

De minimale en de maximale snelheid waarmee een vliegtuig veilig kan vliegen, zijn onder andere afhankelijk van de vlieghoogte. Deze hoogte wordt vaak weergegeven in de Amerikaanse eenheid foot (met meervoud feet). Een foot is iets meer dan 30 cm. Om de snelheid van straaljagers aan te geven, gebruikt men de term **Mach**. Mach 1 is gelijk aan de geluidssnelheid (dit is ongeveer 1224 km/uur). Mach 2 is tweemaal de geluidssnelheid, enzovoorts.

In de figuur zijn alle combinaties van hoogte en snelheid waarmee een F-15-straaljager veilig kan vliegen, grijs weergegeven. Een F-15-piloot zal er tijdens een vlucht voor moeten zorgen dat de combinatie hoogte en snelheid binnen dit veilige gebied valt. De figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

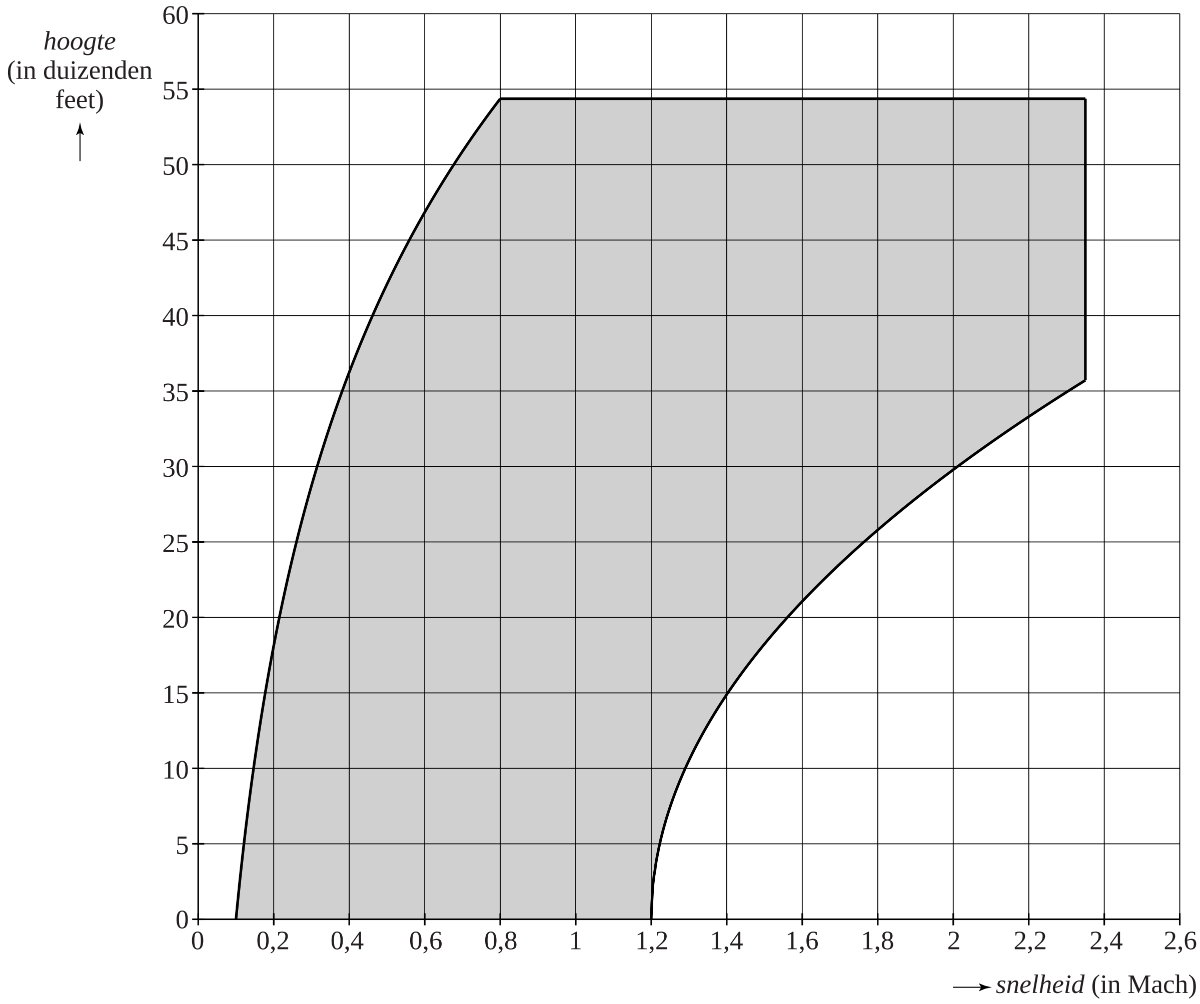
figuur



In de figuur is bijvoorbeeld af te lezen dat een F-15-straaljager op een hoogte van 10 000 feet veilig vliegt bij een snelheid tussen Mach 0,15 en Mach 1,29.

uitwerkbijlage

1



Een F-15 stijgt op vanaf een hoogte van 0 feet met een snelheid van Mach 0,4. Tijdens elke 5000 feet stijging voert de piloot de snelheid met Mach 0,3 op. Tijdens deze vlucht neemt de hoogte lineair toe met de snelheid.

4p **1** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage tot welke maximale hoogte en bijbehorende snelheid de F-15 op deze manier veilig blijft vliegen. Geef de snelheid in Mach in één decimaal nauwkeurig en de hoogte in duizenden feet nauwkeurig.

De formule die hoort bij de gekromde linker rand van het in de figuur grijs gemaakte gebied, is:

$$h = 60,2 \cdot \log(10v)$$

De formule die hoort bij de gekromde rechter rand van het in de figuur grijs gemaakte gebied, is:

$$h = 33,3 \cdot \sqrt{v - 1,2}$$

In beide formules is h de hoogte in duizenden feet en v de snelheid in Mach.

Een andere F-15 vliegt op een hoogte van 30 000 feet.

3p **2** Bereken de minimale veilige snelheid in Mach van deze F-15. Rond je antwoord af op één decimaal.

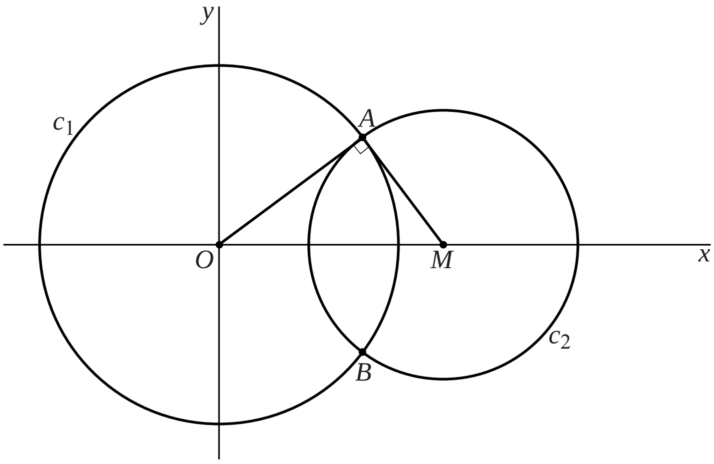
In de formule $h = 33,3 \cdot \sqrt{v - 1,2}$ is h uitgedrukt in v.

3p **3** Herleid deze formule zo dat v uitgedrukt wordt in h.

Twee cirkels, één raaklijn

De cirkel c_1 met middelpunt O is gegeven door $x^2 + y^2 = 16$.
De cirkel c_2 met middelpunt M is gegeven door $x^2 - 10x + y^2 + 16 = 0$.
De cirkels snijden elkaar in de punten A en B. Zie figuur 1.

figuur 1

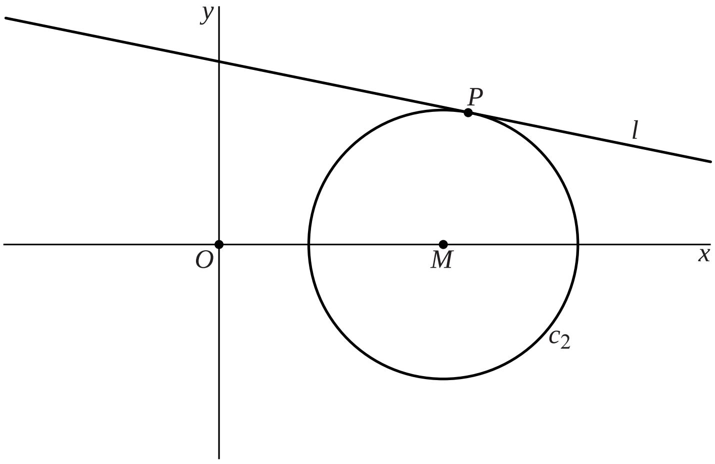


Er geldt: $\angle OAM = 90°$

5p **4** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De lijn l met vergelijking $y = -\frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot x + \frac{5}{3}\sqrt{6}$ raakt cirkel c_2 in het punt P.
Zie figuur 2.

figuur 2



5p **5** Bereken exact de coördinaten van P.

Functies met een wortel

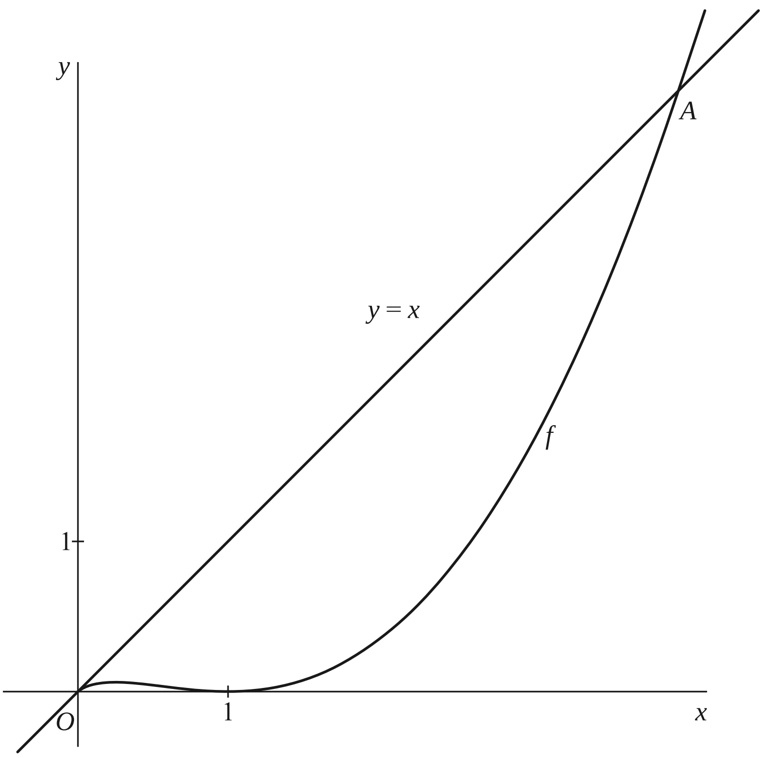
De functie f wordt gegeven door $f(x) = (x - \sqrt{x})^2$.
Er geldt:

$$f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1$$

3p **6** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

In figuur 1 zijn de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend.

figuur 1



De grafiek van f en de lijn $y = x$ hebben behalve de oorsprong het punt A gemeenschappelijk. De x-coördinaat van A is 4.

5p **7** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

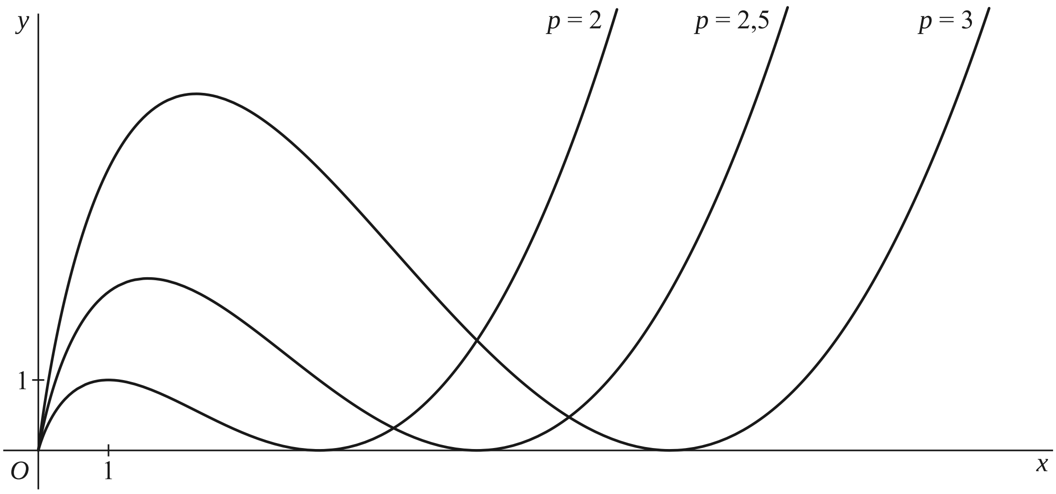
Lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt A.
De lijn k gaat door A en staat loodrecht op de lijn $y = x$.

5p **8** Bereken in hele graden nauwkeurig de hoek die k en l met elkaar maken.

De formule die hoort bij de grafiek van f is $y = (x - \sqrt{x})^2$.
Deze formule kun je ook schrijven als $y = (x - p\sqrt{x})^2$ met $p = 1$.

Voor elke waarde van p kan bij de formule $y = (x - p\sqrt{x})^2$ de bijbehorende grafiek getekend worden. In figuur 2 zijn voor een aantal waarden van p met $p > 0$ de bijbehorende grafieken getekend.

figuur 2



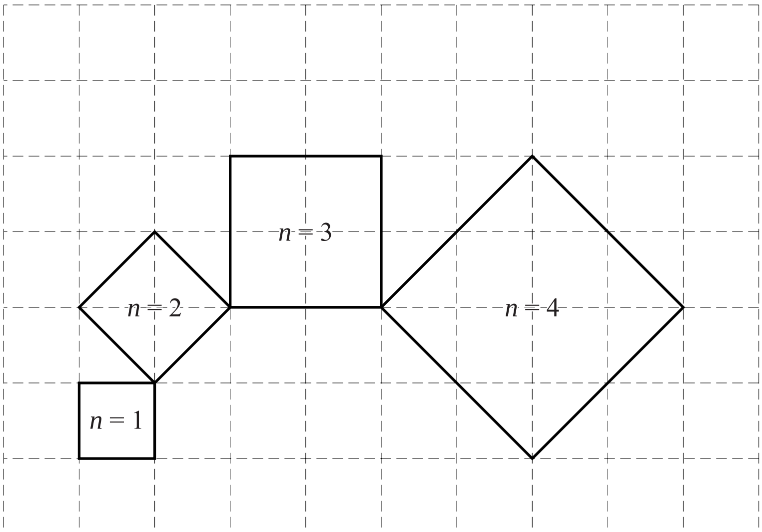
Er zijn twee waarden van p waarvoor de grafiek van $y = (x - p\sqrt{x})^2$ door het punt (36, 36) gaat.

4p **9** Bereken exact deze waarden van p.

Vierkanten

In de figuur staan vier vierkanten die telkens in een hoekpunt met elkaar verbonden zijn.
Elk vierkant heeft een rangnummer n. In de figuur zijn de vierkanten met de rangnummers 1 tot en met 4 getekend.

figuur



De lengte van de zijde van een vierkant is telkens gelijk aan de lengte van de diagonaal van het voorgaande vierkant.

De lengte van de zijde van een vierkant met rangnummer n stellen we gelijk aan $z(n)$.
Voor het vierkant met rangnummer $n = 1$ geldt $z(1) = 1$.
Voor het vierkant met rangnummer $n = 3$ geldt $z(3) = 2$.

De lengte van de zijde van een opvolgend vierkant wordt telkens vergroot met een factor k.

3p **10** Bereken de exacte waarde van k.

Voor de oppervlakte A van een vierkant met rangnummer n geldt de formule:

$$A(n) = \frac{1}{2} \cdot 2^n$$

Voor een bepaald vierkant is de oppervlakte gelijk aan 131 072.

3p **11** Bereken exact het bijbehorende rangnummer n.

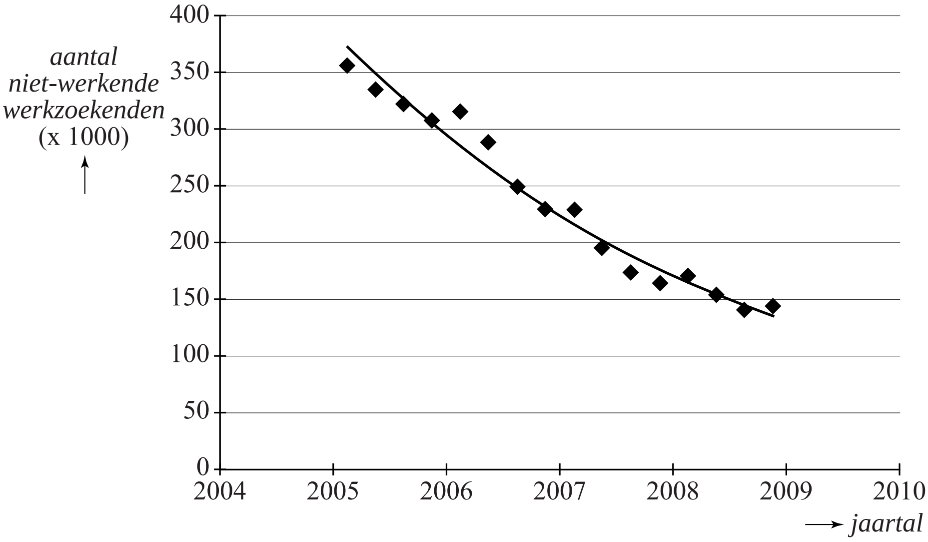
Er kan een formule voor $z(n)$ opgesteld worden waarmee je direct de lengte van een zijde kunt berekenen. Deze formule is van de vorm $z(n) = 2^{a \cdot n + b}$.

4p **12** Bereken de waarden van a en b.

Niet-werkende werkzoekenden

Op de website van het UWV (Uitvoeringsinstituut Werknemers-verzekeringen) worden gegevens gepubliceerd over de aantallen niet-werkende werkzoekenden in Nederland. In figuur 1 zijn deze gegevens door middel van kleine vierkantjes per kwartaal weergegeven over de jaren 2005 tot en met 2008. Verder is in de figuur een grafiek getekend die het aantal niet-werkende werkzoekenden benadert.

figuur 1



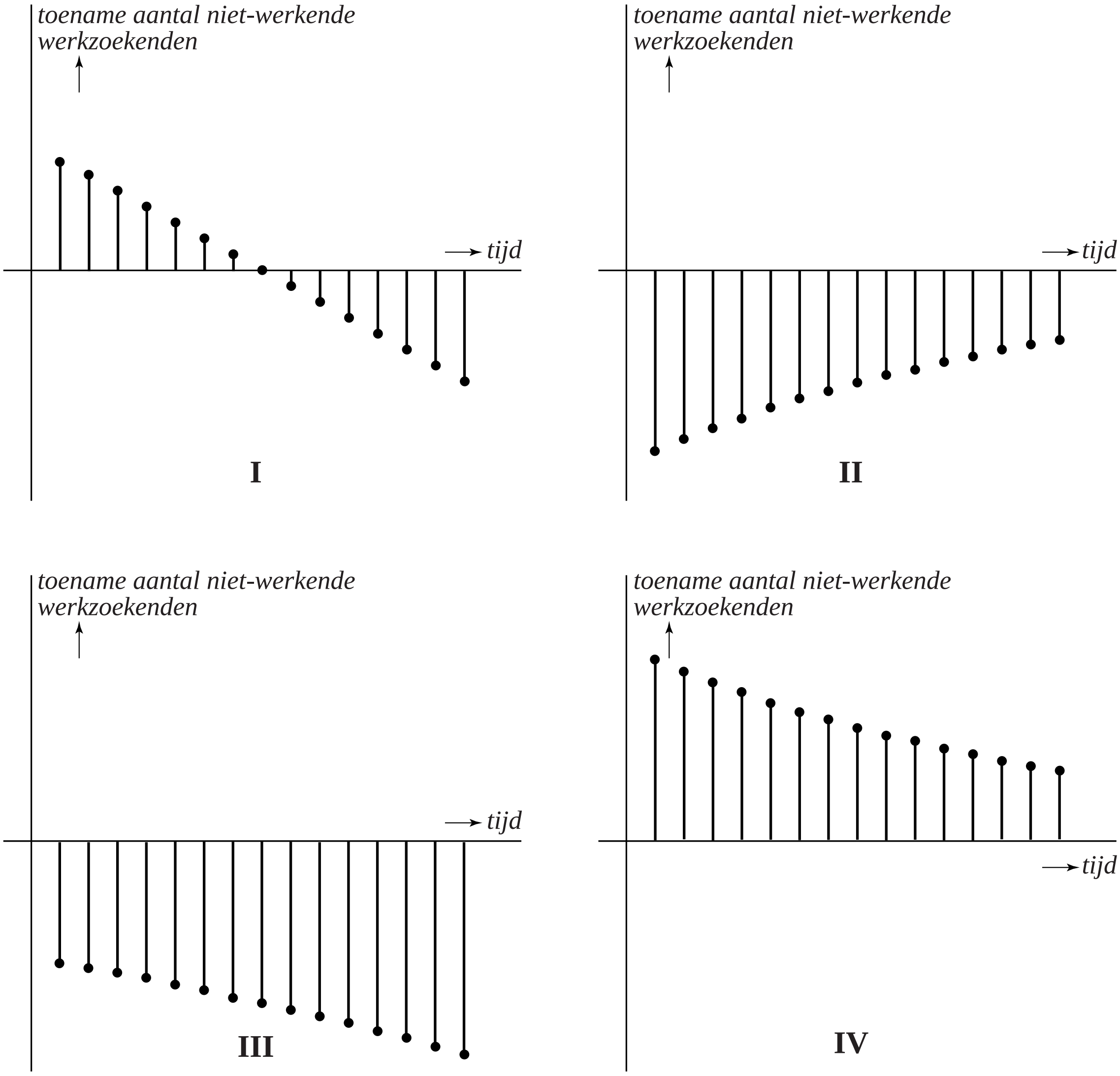
Over de jaren 2005 tot en met 2008 nam het aantal niet-werkende werkzoekenden bij benadering exponentieel af.

In het eerste kwartaal van 2005 waren er 356 000 niet-werkende werkzoekenden. In het laatste kwartaal van 2008 waren dat er 144 000.

4p **13** Bereken met behulp van deze gegevens met hoeveel procent per kwartaal het aantal niet-werkende werkzoekenden in deze periode bij benadering afnam. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

In figuur 2 zijn vier toenamendiagrammen getekend.

figuur 2



Eén van bovenstaande toenamendiagrammen past bij de exponentiële afname uit figuur 1.

3p **14** Leg uit welk toenamendiagram dat is.

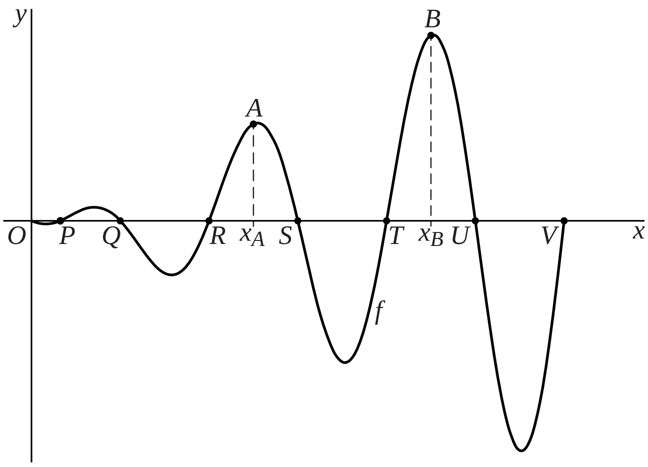
Een functie met sinus

Op het domein $[0, 6\pi]$ is de functie f gegeven door:

$$f(x) = x \cdot \sin(x) - \sin(x)$$

Op het gegeven domein zijn de punten $O(0, 0)$, $P(1, 0)$, Q, R, S, T, U en V de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.
De punten A en B liggen op de grafiek van f.
De x-coördinaat van A ligt midden tussen de x-coördinaten van R en S.
De x-coördinaat van B ligt midden tussen de x-coördinaten van T en U.
Zie figuur 1.

figuur 1

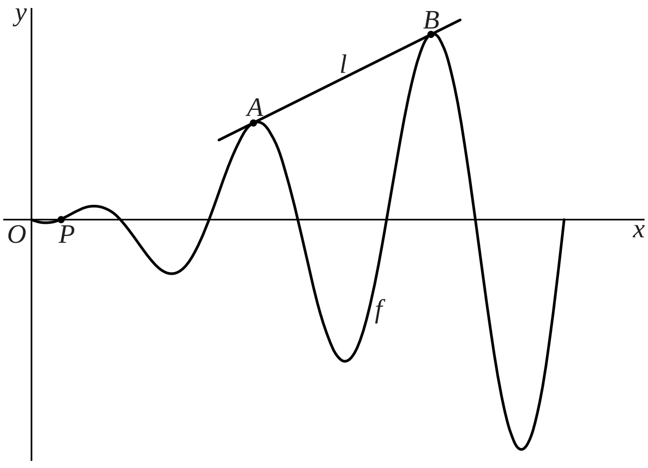


Uit de gegevens volgt: $x_A = 2\frac{1}{2}\pi$ en $x_B = 4\frac{1}{2}\pi$

4p **15** Toon met behulp van exacte berekeningen aan dat inderdaad uit de gegevens volgt dat $x_A = 2\frac{1}{2}\pi$ en $x_B = 4\frac{1}{2}\pi$.

Lijn l is de lijn door de punten A en B. Zie figuur 2.

figuur 2



Lijn l lijkt door $P(1, 0)$ te gaan.

4p **16** Toon met behulp van exacte berekeningen aan dat l door P gaat.

Cirkel en punt

De cirkel c is gegeven door $(x-2)^2+(y+3)^2=20$.
Bovendien is gegeven het punt $A(3, 1)$.

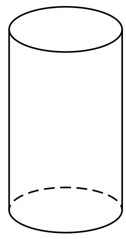
3p **17** Onderzoek of A op, binnen of buiten de cirkel ligt.

Gegeven is het punt $B(1, -5)$.
De cirkel c heeft twee snijpunten met de y-as, de punten P en Q.

6p **18** Bereken hoek PBQ in hele graden nauwkeurig.

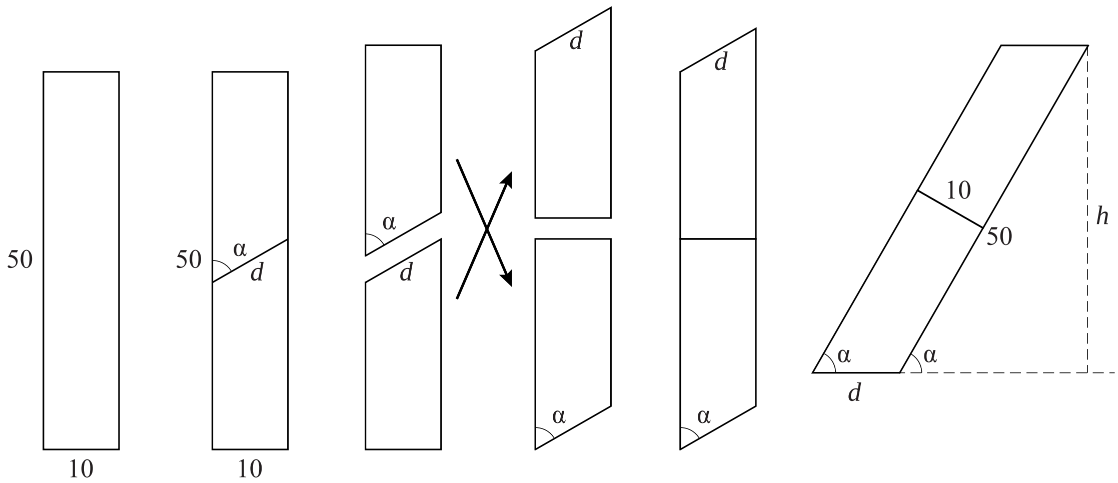
Van een rechte naar een scheve cilinder

In deze opgave bekijken we een cilinder waarvan de hoogte 50 is en de diameter van het grondvlak 10. In figuur 1 is een zijaanzicht van deze **rechte** cilinder weergegeven.
De cilinder wordt scheef doorgesneden en vervolgens worden de twee losse delen zo aan elkaar vastgemaakt dat het cirkelvormige grondvlak en bovenvlak van de rechte cilinder tegen elkaar liggen. Uiteindelijk ontstaat een **scheve** cilinder.
In de figuren 2 tot met 6 wordt dit proces in het zijaanzicht weergegeven.



cilinder

figuur 1 **figuur 2** **figuur 3** **figuur 4** **figuur 5** **figuur 6**



De hoek die het snijvlak bij het scheef doorsnijden van de cilinder maakt met de lengterichting noemen we α en de lengte van de doorsnede in het zijaanzicht noemen we d. De hoogte van de scheve cilinder in de stand van figuur 6 noemen we h. In de figuren 2 tot en met 5 zijn α en d aangegeven.
In figuur 6 zijn α, d en h aangegeven.

Bij een bepaalde waarde van α is de hoogte h van de scheve cilinder 90% van de hoogte van de oorspronkelijke, rechte cilinder.

3p **19** Bereken deze waarde van α. Geef je antwoord in hele graden nauwkeurig.

Voor de inhoud V_1 van de **rechte** cilinder geldt $V_1 = 50 \cdot G_1$, waarbij G_1 de oppervlakte van het grondvlak van de rechte cilinder is. Voor de inhoud V_2 van de **scheve** cilinder geldt $V_2 = h \cdot G_2$, waarbij G_2 de oppervlakte van het grondvlak van de scheve cilinder is.
De inhoud van beide cilinders is gelijk, dus $V_1 = V_2$.

Er geldt: $G_2 = \dfrac{G_1}{\sin(\alpha)}$

4p **20** Toon dit laatste op algebraïsche wijze aan.