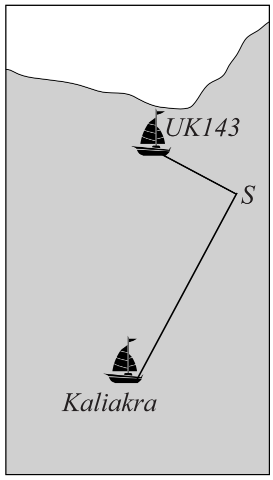
Gevaar op zee

Schepen die elkaar te dicht naderen worden gewaarschuwd door de kustwacht. Wanneer schepen niet op zo'n waarschuwing hebben gereageerd, stelt de Inspectie Verkeer en Waterstaat een onderzoek in.

figuur 1



De tekening in de figuur is afkomstig uit een onderzoeksrapport. Er is te zien dat de vaarroutes van de UK143 en de Kaliakra elkaar snijden in punt S.

In het onderzoeksrapport wordt ervan uitgegaan dat in de beginsituatie de UK143 zich op 1,2 zeemijl afstand van S bevindt en vaart met een snelheid van 7,0 zeemijl per uur. De Kaliakra bevindt zich op dat moment op 2,8 zeemijl van S en vaart met een snelheid van 16,5 zeemijl per uur.

De afstanden van de twee schepen tot S zijn gegeven door de volgende formules:

$U(t) = 1{,}2 - 7{,}0t$ en $K(t) = 2{,}8 - 16{,}5t$

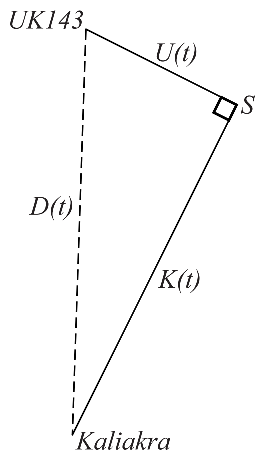
Hierin is t de tijd in uren gemeten vanaf de beginsituatie, U de afstand op tijdstip t van de UK143 tot S in zeemijlen en K de afstand op tijdstip t van de Kaliakra tot S in zeemijlen. We gaan er in deze opgave van uit dat de beide schepen hun koers en snelheid niet veranderen.

De twee schepen komen niet precies op hetzelfde moment in S aan.

3p **1** Bereken hoeveel seconden verschil hier tussen zit.

De hoek die de vaarroutes van de twee schepen met elkaar maken is 90º. Voor elke t kan met behulp van de stelling van Pythagoras de afstand $D(t)$ tussen de twee schepen berekend worden. Zie figuur 2.

figuur 2



Er is sprake van een gevaarlijke situatie als de afstand tussen de twee schepen kleiner is dan 0,2 zeemijl.

4p **2** Bereken na hoeveel minuten dit voor het eerst het geval is. Geef je antwoord in hele minuten.

Functies met een wortel

De functie f is gegeven door $f(x) = x\sqrt{x} - x$.

De lijn k met vergelijking $y = \frac{1}{2}x$ heeft met de grafiek van f behalve de oorsprong ook nog het punt S gemeenschappelijk.

4p **3** Bereken exact de x-coördinaat van S.

De functie g is gegeven door $g(x) = x\sqrt{x} - 9x$. De grafiek van g heeft een top.

4p **4** Bereken exact de coördinaten van deze top.

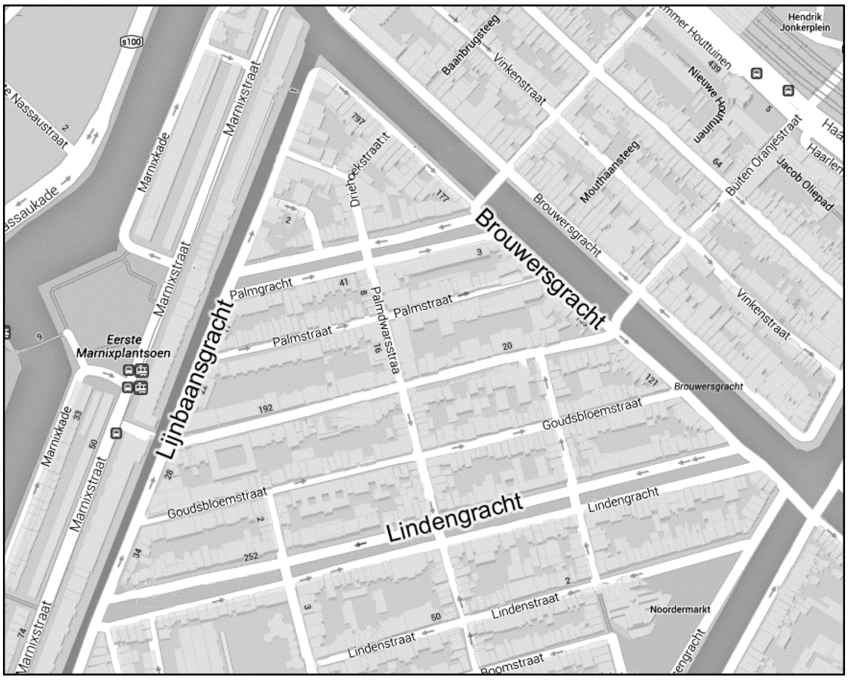
De functie h is gegeven door $h(x) = x\sqrt{x} - px$. Het punt $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ ligt op de grafiek van h.

3p **5** Bereken exact de waarde van p.

Grachtenloop

In Amsterdam wil men een grachtenloop organiseren. De deelnemers zullen een parkoers lopen langs de Lindengracht, Lijnbaansgracht en Brouwersgracht. Zie de figuur.

figuur



Het deel van het parkoers langs de Lijnbaansgracht is 450 meter. De hoek tussen de Lindengracht en de Lijnbaansgracht is 55° en de hoek tussen de Brouwersgracht en de Lijnbaansgracht is 71°.
De vorm van het parkoers is te benaderen door een driehoek ABC met $AC = 450$ meter, $\angle ACB = 71°$ en $\angle BAC = 55°$.

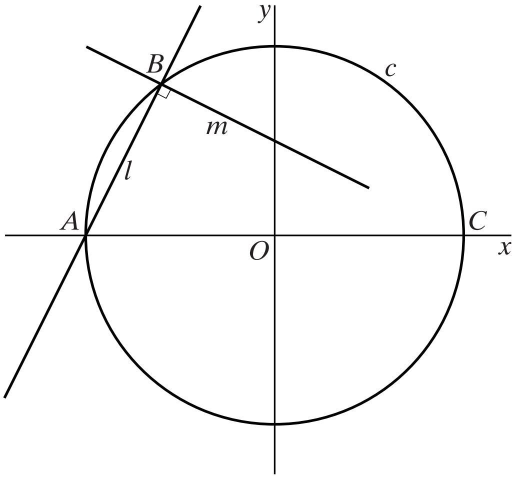
Tijdens de grachtenloop zullen er meerdere hele rondes over het parkoers gelopen worden zodanig dat er ten minste 10 kilometer gelopen wordt.

7p **6** Bereken het minimale aantal hele rondes waaruit de grachtenloop zal bestaan.

Lijnen door punten op een cirkel

Gegeven zijn cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ en de punten $A(-5, 0)$ en $B(-3, 4)$ op c. Lijn l is de lijn door A en B. Lijn m staat loodrecht op l en gaat door B. Punt C is het snijpunt van de cirkel met de positieve x-as. Zie figuur 1.

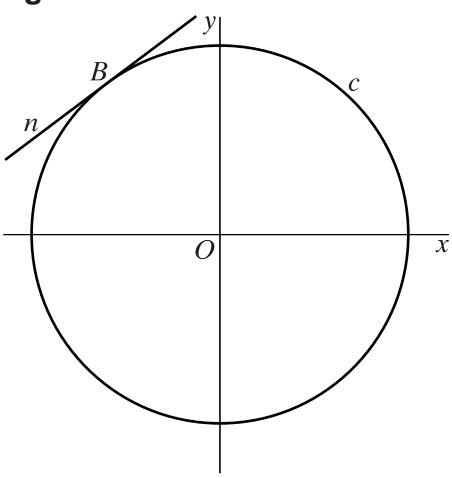
figuur 1



5p **7** Onderzoek met behulp van een berekening of m door C gaat.

Verder is lijn n door B gegeven met vergelijking $3x - 4y = -25$. In figuur 2 zijn c en n getekend.

figuur 2



n is de raaklijn aan c in B.

4p **8** Toon dit aan.

Zwabberende functie

Op het domein $[0, 6\pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = x \cdot \sin x$.

De lijn met vergelijking $y = x$ heeft behalve de oorsprong nog drie punten gemeenschappelijk met de grafiek van f.

4p **9** Bereken exact de coördinaten van deze punten.

De helling van de grafiek van f in het punt $(2\pi, 0)$ is te benaderen door een differentiequotiënt met $\Delta = 0,001$ te berekenen.

3p **10** Benader op deze manier de helling van de grafiek van f in dit punt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Getint glas

Getint glas laat slechts een deel van het invallende licht door.
De hoeveelheid doorgelaten licht neemt exponentieel af met de dikte van het glas: hoe dikker het glas, hoe minder licht wordt doorgelaten.

Voor een bepaald soort getint glas geldt dat het bij een dikte van 1 mm 90% van het licht doorlaat. Bij een zekere grotere dikte van hetzelfde soort glas zal nog maar 50% van het licht worden doorgelaten.

4p **11** Bereken deze dikte in mm. Rond je antwoord af op één decimaal.

De **extinctie** geeft de mate aan waarin getint glas invallend licht opneemt.
Voor de extinctie E geldt de formule: $10^{-E} = \dfrac{L_{\text{uit}}}{L_{\text{in}}}$
Hierin is L_{in} de hoeveelheid invallend licht en L_{uit} de hoeveelheid doorgelaten licht.

Een ruit van getint glas neemt 15% van het invallende licht op.

3p **12** Bereken de extinctie van deze ruit. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De extinctie hangt af van de dikte van het getinte glas en van de concentratie absorberende stof in het glas. Voor een bepaald type autoruit geldt: $E = 0{,}1 \cdot C \cdot d$
Hierin is C de concentratie van de absorberende stof (in mol per liter) en d de dikte van het glas in mm.

foto

Voor getinte autoruiten gelden wettelijk vastgestelde eisen. Voorruiten moeten minimaal 75% van het invallende licht doorlaten.

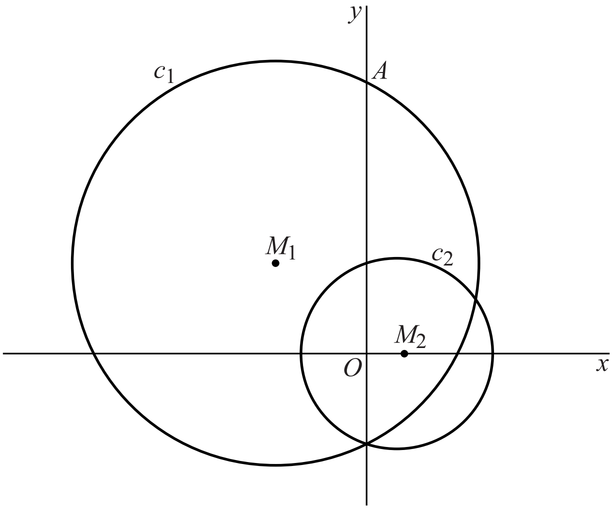
Een fabrikant wil getinte voorruiten van 6 mm dik maken die precies 75% van het invallende licht doorlaten.

4p **13** Bereken op algebraïsche wijze de concentratie absorberende stof in deze ruiten. Rond je antwoord af op één decimaal.

Twee cirkels

De cirkels c_1 en c_2 zijn gegeven door de vergelijkingen $x^2 + y^2 = 6y - 6x + 27$ en $(x-1)^2 + y^2 = 10$. Het middelpunt van c_2 is punt $M_2(1, 0)$. Cirkel c_1 snijdt de positieve y-as in punt A. Zie figuur 1.

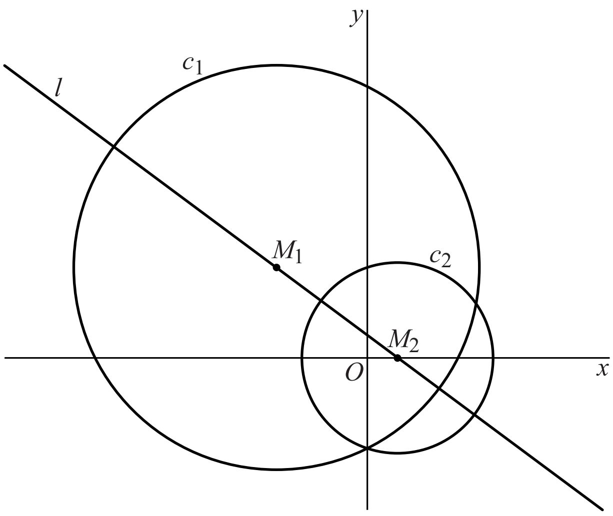
figuur 1



5p **14** Bereken exact de afstand van A tot c_2.

Lijn l is de lijn door het middelpunt M_1 van c_1 en het middelpunt M_2 van c_2. Zie figuur 2.

figuur 2

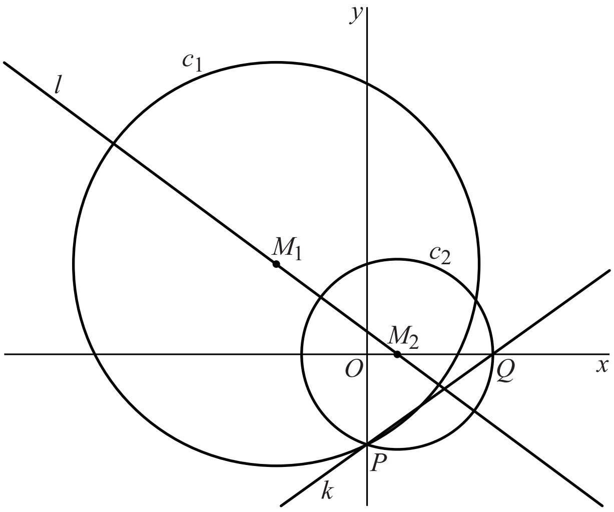


Een vergelijking voor l is $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$.

3p **15** Toon dit aan.

c_1 en c_2 snijden elkaar op de y-as in punt $P(0, -3)$. c_2 snijdt de positieve x-as in punt Q. Lijn k is de lijn door P en Q. Zie figuur 3.

figuur 3

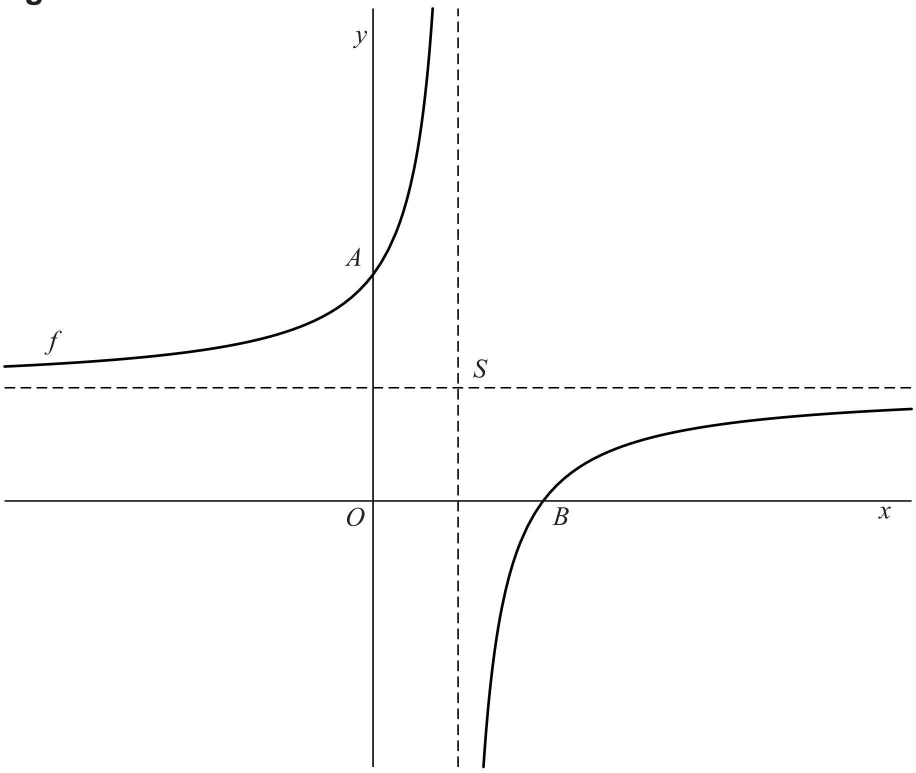


6p **16** Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en l.

Gebroken functies

De functie f is gegeven door $f(x) = -\frac{6}{2x-3} + 2$. De grafiek van f snijdt de y-as in punt A en de x-as in punt B. Punt S is het snijpunt van de asymptoten van de grafiek van f. Zie de figuur.

figuur



7p **17** Onderzoek met behulp van een berekening of A, B en S op één lijn liggen.

Er worden twee transformaties op de grafiek van f uitgevoerd: de vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x-as, gevolgd door de translatie $(-2, 8)$. Hierdoor ontstaat de grafiek van g.

3p **18** Toon op algebraïsche wijze aan dat de grafiek van g door de oorsprong gaat.