Kwelders

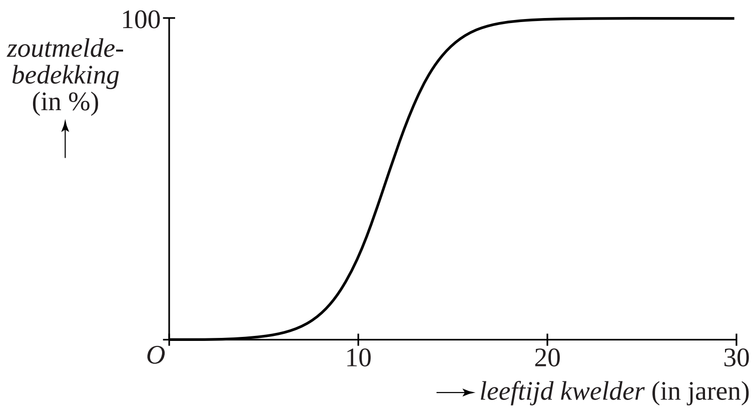
De vorm van eilanden, bijvoorbeeld in de Waddenzee, verandert voortdurend. De zee spoelt stukken strand weg en op andere plekken ontstaat juist nieuw land. Deze nieuwe stukken land worden kwelders genoemd.

Een plant die op kwelders groeit, is de zoutmelde. Het verband tussen de leeftijd van een kwelder en het percentage van de bodem dat bedekt is met zoutmelde kan bij benadering beschreven worden door de formule:

$$P(t) = \frac{100}{1 + 3000 \cdot 0{,}5^t}$$

Hierin is P het percentage van de kwelder dat bedekt is met zoutmelde en t de leeftijd van de kwelder in jaren. In figuur 1 is de bijbehorende grafiek getekend.

figuur 1



3p **1** Bereken na hoeveel jaar de helft van een kwelder bedekt is met zoutmelde. Rond je antwoord af op een geheel aantal jaren.

Zoutmelde neemt na verloop van tijd de plaats in van een deel van de planten die door ganzen worden gegeten. Ganzen eten de zoutmelde niet. Daarom heeft de hoeveelheid zoutmelde invloed op het aantal ganzen. Het gemiddelde aantal ganzen per vierkante kilometer kwelder hangt dus af van de leeftijd van de kwelder. Dit verband kan vanaf het vierde jaar bij benadering beschreven worden door de formules:

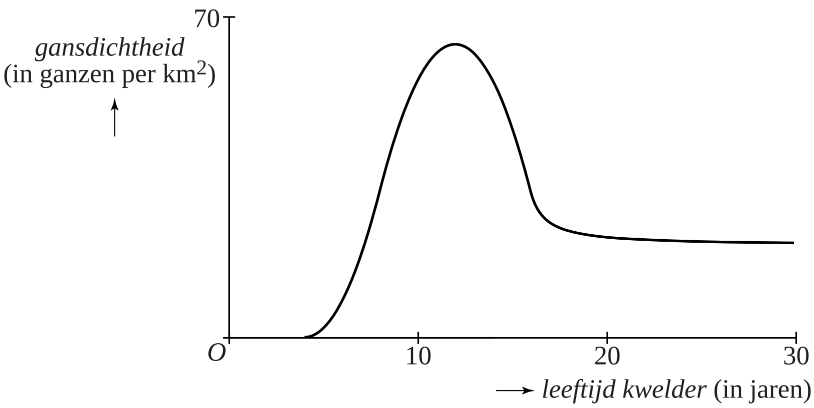
$G_1(t) = 2(t-4)^2$ voor $4 \le t \le 8$

$G_2(t) = -2(t-12)^2 + 64$ voor $8 \le t \le 16$

$G_3(t) = \dfrac{80t - 1184}{4t - 61}$ voor $t \ge 16$

Hierin zijn G_1, G_2 en G_3 de gansdichtheden in de verschillende periodes en is t de leeftijd van de kwelder in jaren. De **gansdichtheid** is het gemiddelde aantal ganzen per vierkante kilometer kwelder. In figuur 2 zijn de bijbehorende grafieken getekend.

figuur 2



De grafieken van de eerste twee periodes sluiten vloeiend op elkaar aan. Dit betekent dat aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:

1 de formules hebben voor $t = 8$ dezelfde uitkomst;
2 de hellingen van de grafieken zijn voor $t = 8$ aan elkaar gelijk.

4p **2** Toon op algebraïsche wijze aan dat aan beide voorwaarden is voldaan.

Gedurende een aantal jaren ligt de gansdichtheid boven de 40 (ganzen per km^2).

4p **3** Bereken gedurende hoeveel jaar dit het geval is.

Als de kwelder op den duur grotendeels is begroeid met zoutmelde is het voor de ganzen moeilijk om voedsel te vinden. Toch blijven er dan ganzen op de kwelder komen. In figuur 2 is te zien dat de gansdichtheid op de lange duur tot een bepaalde grenswaarde daalt.

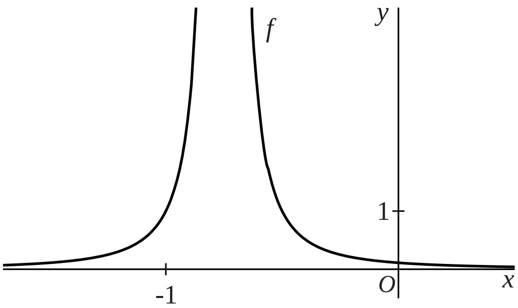
3p **4** Onderzoek hoe groot deze grenswaarde volgens de formule voor G_3 is.

Gebroken functie

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$.

In de figuur is de grafiek van f getekend.

figuur



De horizontale lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}$ snijdt de grafiek van f in twee punten.

4p **5** Bereken exact de coördinaten van deze twee punten.

Voor de afgeleide van f geldt: $f'(x) = \dfrac{-8}{(4x+3)^3}$

4p **6** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Punt $A(1, \frac{1}{49})$ ligt op de grafiek van f. De lijn $y = ax + b$ is de raaklijn aan de grafiek van f in A.

3p **7** Bereken exact de waarden van a en b.

Krik

Een krik is een voorwerp dat gebruikt wordt om auto's aan één kant omhoog te tillen.

Op foto 1 zie je een krik onder een auto in de beginpositie. Op foto 2 is de auto met behulp van de krik aan een kant opgetild zodat er een wiel gewisseld kan worden. Op foto 3 zie je de krik op de grond liggen. In deze foto zijn bij de scharnierpunten van de krik de letters A, B, C en D geplaatst. Ook zijn er enkele lijnstukken getekend die deze punten verbinden.

foto 1

foto 2

foto 3

De afstanden AB, BC en BD en hoek ABC zijn vast. $AB = 20,0$ cm, $BC = 9,1$ cm, $BD = 13,0$ cm en $\angle ABC = 153°$.

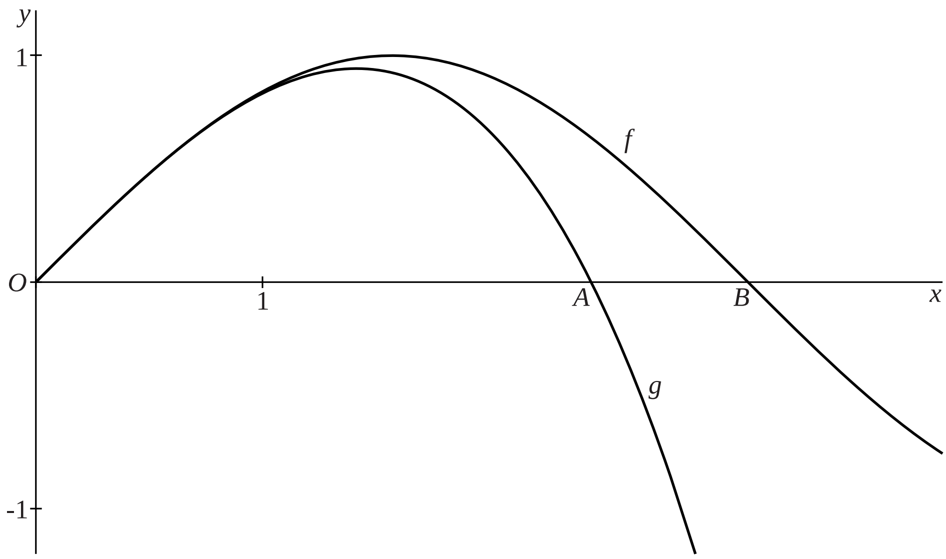
Door aan de zwengel van de krik te draaien, wordt de afstand tussen de scharnierpunten C en D groter of kleiner. Als gevolg hiervan wordt de afstand tussen de scharnierpunten A en D kleiner of groter. In de situatie van foto 1 geldt $AD = 17,7$ cm.

5p **8** Bereken de afstand CD in deze situatie. Geef je antwoord in hele mm nauwkeurig.

f boven g

Op het domein $[0, 4]$ zijn de functies f en g gegeven door $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x - \frac{1}{6}x^3$.
In de figuur zijn de grafieken van f en g getekend.

figuur



De grafiek van g snijdt de x-as in de oorsprong en in punt A. De grafiek van f snijdt de x-as in de oorsprong en in punt B.

5p **9** Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.

Het maximum van g kan geschreven worden in de vorm $a\sqrt{b}$ met b een zo klein mogelijk geheel getal.

5p **10** Bereken exact de mogelijke waarden van a en b.

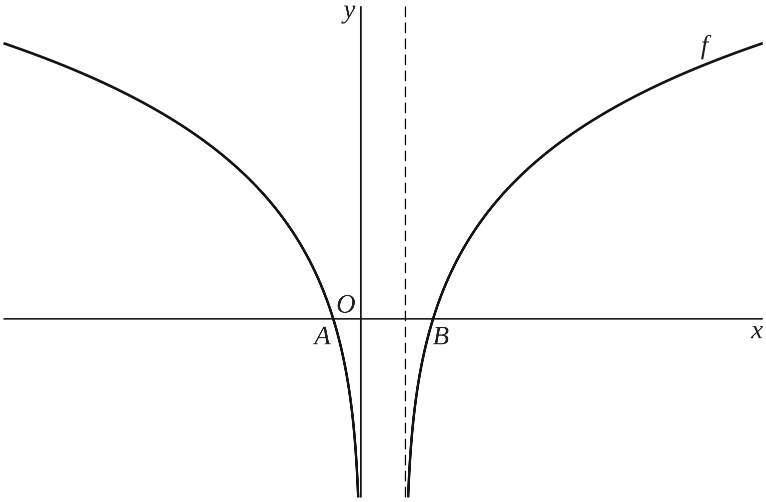
De grafiek van f ligt voor $0 < x \leq 4$ boven de grafiek van g.

4p **11** Bereken de maximale waarde van x waarvoor het verschil tussen $f(x)$ en $g(x)$ minder dan 0,01 bedraagt. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Functie met logaritme

De functie f is gegeven door $f(x) = {}^{2}\log(x^2 - x)$.

figuur



De grafiek van f heeft twee verticale asymptoten. Zie de figuur.

2p **12** Geef van elk van deze asymptoten een vergelijking.

De grafiek van f snijdt de x-as in de punten A en B. Zie de figuur.

5p **13** Bereken exact de lengte van lijnstuk AB.

De grafiek van f wordt met 2 vermenigvuldigd ten opzichte van de x-as.
Zo ontstaat de grafiek van een functie g.

3p **14** Toon op algebraïsche wijze aan dat de functie g wordt gegeven door $g(x) = {}^{2}\log(x^2(x^2 - 2x + 1))$.

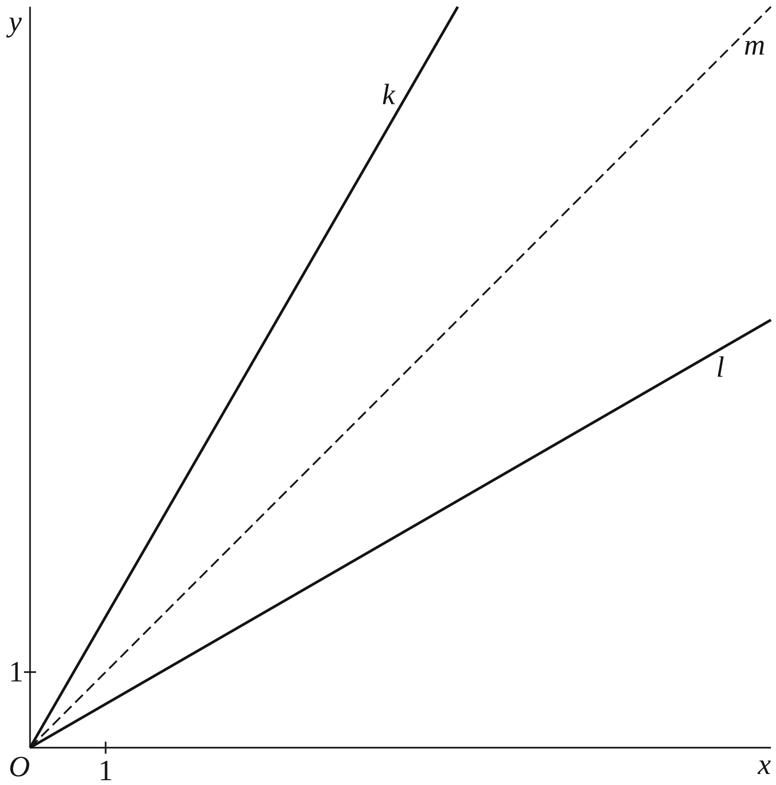
Bissectrices

De lijn k is gegeven door: $y = \sqrt{3} \cdot x$

De lijn l is gegeven door: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$

De bissectrice van een hoek is de lijn die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. In de figuur hieronder is de bissectrice m van de hoek die de lijnen k en l met elkaar maken, gestippeld weergegeven.

figuur



3p **15** Toon op algebraïsche wijze aan dat de hoek die m met de x-as maakt 45° is.

Voor elke bissectrice geldt de volgende eigenschap: “elk punt op de bissectrice heeft gelijke afstanden tot de benen van de hoek”.

Lijn l is de bissectrice van de hoek die lijn k met de x-as maakt.
Het punt $P(\sqrt{3}, 1)$ ligt op l.

Uit deze gegevens en bovengenoemde eigenschap volgt dat de afstand van P tot de x-as gelijk is aan de afstand van P tot de lijn k. Dat deze afstanden gelijk zijn, kan ook aangetoond worden zonder van bovengenoemde eigenschap gebruik te maken.

6p **16** Toon door exacte berekeningen aan dat de afstand van het punt $P(\sqrt{3}, 1)$ tot de x-as gelijk is aan de afstand van dit punt P tot de lijn k.

Twee functies

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = (x+2)\sqrt{x+2}$ en $g(x) = x(x+2)$.

De grafieken van f en g hebben de punten A en B gemeenschappelijk.

4p **17** Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

Op de grafiek van f ligt een punt C. De raaklijn in C aan de grafiek van f heeft richtingscoëfficiënt 6.

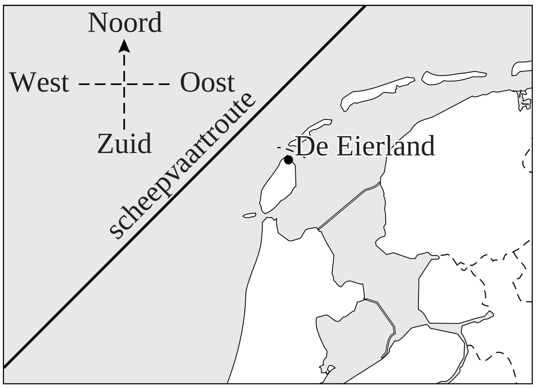
5p **18** Bereken exact de x-coördinaat van C.

De Eierland

De Eierland is een vuurtoren op de noordpunt van het Waddeneiland Texel. Zie figuur 1.

In deze figuur is ook een belangrijke scheepvaartroute door de Noordzee getekend, die in de buurt van Texel grofweg van zuidwest naar noordoost loopt. De route passeert De Eierland aan de noordkant op een afstand van ongeveer 28 kilometer.

figuur 1

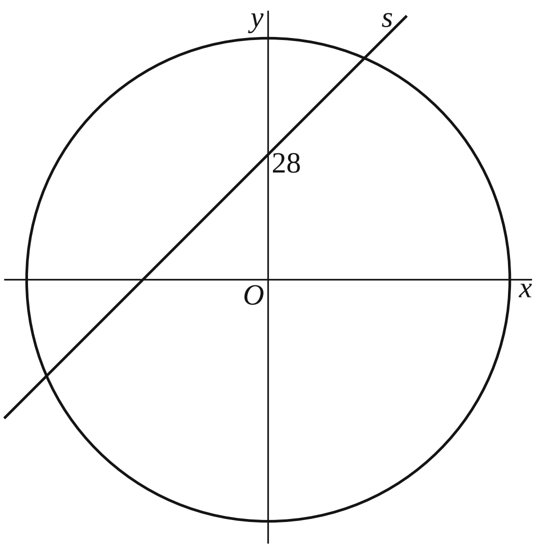


Het licht van de vuurtoren De Eierland heeft bij helder weer een reikwijdte van ongeveer 54 kilometer.

Een schematische voorstelling van bovenstaande situatie wordt in een assenstelsel geplaatst met De Eierland in de oorsprong van het assenstelsel en langs beide assen de kilometer als eenheid. Hierbij wordt de scheepvaartroute voorgesteld door de lijn s die de x-as onder een hoek van 45° en de y-as in het punt $(0, 28)$ snijdt. Zie figuur 2.

Het **bereik** van een vuurtoren is het gebied waarbinnen bij helder weer het licht van de vuurtoren gezien kan worden. In figuur 2 is het bereik van De Eierland voorgesteld als een cirkelvormig gebied met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 54.

figuur 2



Een schip vaart met een snelheid van 22 km/uur over de aangegeven scheepvaartroute.

8p **19** Bereken hoeveel tijd dit schip binnen het bereik van De Eierland vaart. Geef je antwoord in kwartieren nauwkeurig.