Oppervlakte onder een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

De grafiek van f is een parabool.

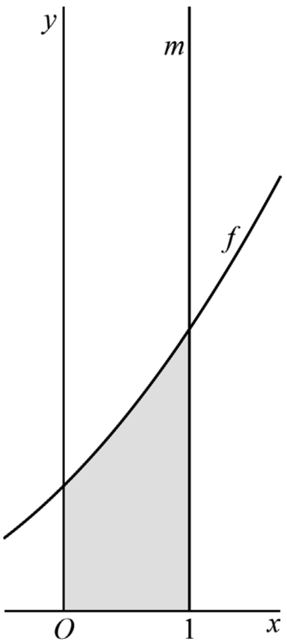
2p 6 Bewijs dat de top van de parabool op de x-as ligt.

De lijn m is de verticale lijn met vergelijking $x = p$, met $p > 0$.

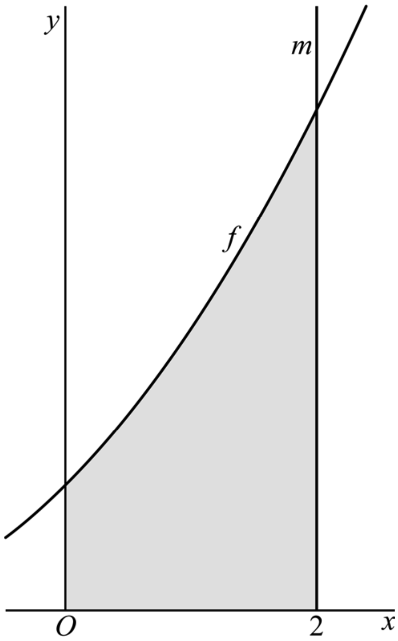
We kijken naar het gebied dat aan de bovenkant wordt begrensd door de grafiek van f, aan de onderkant door de x-as, aan de linkerkant door de y-as en aan de rechterkant door lijn m.

In figuren 1 en 2 is dit gebied grijs gemaakt: in figuur 1 voor de situatie $p = 1$, in figuur 2 voor de situatie $p = 2$.

figuur 1



figuur 2



De oppervlakte van dit grijze gebied noemen we A. De waarde van A hangt dus af van de keuze van p. Een formule voor A is:

$$A = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}p + 1\right)^3 - \frac{2}{3}$$

Zo is bijvoorbeeld $A = 4\frac{2}{3}$ als $p = 2$ en dus is de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 2 gelijk aan $4\frac{2}{3}$.

Voor een bepaalde waarde van p is de oppervlakte van het grijze gebied gelijk aan 42.

4p 7 Bereken exact deze waarde van p.

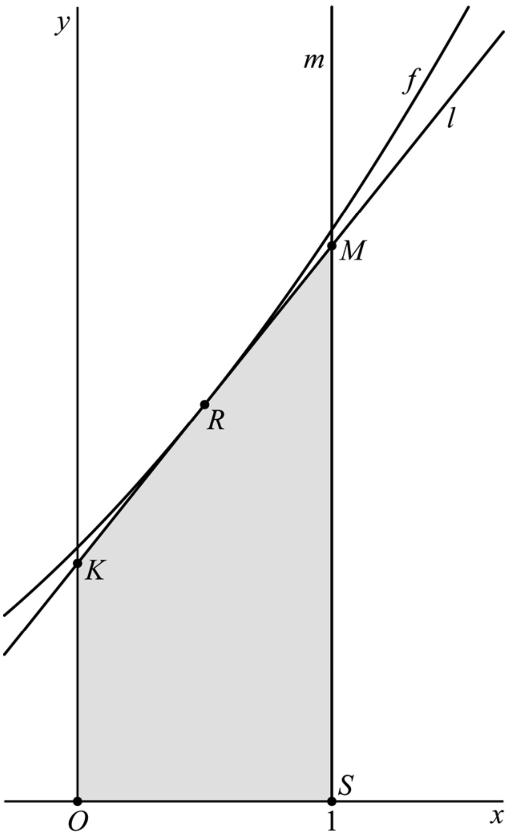
Zonder de voorgaande formule te gebruiken kun je toch een goede benadering vinden van de oppervlakte. In de rest van de opgave doen we dit voor het geval $p = 1$.

De benadering van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1 gaat als volgt:

- De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $R\left(\frac{1}{2}, 1\frac{9}{16}\right)$.
- K is het snijpunt van lijn l met de y-as.
- M is het snijpunt van lijn l en lijn m.
- S is het punt met coördinaten $(1, 0)$.
- De oppervlakte van vierhoek $OSMK$ is de benadering.

Zie figuur 3, waarin de oppervlakte van vierhoek $OSMK$ grijs is gemaakt.

figuur 3



Een vergelijking van l is $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$.

3p **8** Bewijs dat $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ inderdaad een vergelijking van l is.

De oppervlakte van de grijs gemaakte vierhoek $OSMK$ in figuur 3 wijkt een beetje af van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1.

5p **9** Bereken algebraïsch hoeveel procent deze afwijking is. Geef je eindantwoord in één decimaal.