

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Gebroken functie en wortelfunctie

1 maximumscore 4

- $f(x) = 1 + 3(4x - 3)^{-1}$ 1
- De afgeleide van de term $3(4x - 3)^{-1}$ is $-3(4x - 3)^{-2} \cdot 4$ 2
- $f'(x) = -3(4x - 3)^{-2} \cdot 4$, dus de helling is $f'(0) = -\frac{4}{3}$ 1

Opmerking

Voor het tweede antwoordelement mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

2 maximumscore 6

- Uit $\frac{4x}{4x-3} = \sqrt{x}$ volgt $\frac{16x^2}{(4x-3)^2} = x$ 1
- Hieruit volgt $x(4x-3)^2 = 16x^2$ 1
- Dit geeft $(4x-3)^2 = 16x$ (of $x = 0$, maar dat geeft punt O) 1
- Herleiding tot $16x^2 - 40x + 9 = 0$ 1
- De abc -formule geeft $x = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9}}{2 \cdot 16}$ 1
- Dus $x = \frac{1}{4}$ of $x = 2\frac{1}{4}$; de x -coördinaat van B is $2\frac{1}{4}$ ($x = \frac{1}{4}$ voldoet niet) 1

of

- $\frac{4x}{4x-3} = \sqrt{x}$ geeft $(4x-3)\sqrt{x} = 4x$ 1
- $4x-3 = 4\sqrt{x}$ (of $x = 0$, maar dat geeft punt O) 1
- Hieruit volgt $(4x-3)^2 = 16x$ 1
- Herleiding tot $16x^2 - 40x + 9 = 0$ 1
- De abc -formule geeft $x = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9}}{2 \cdot 16}$ 1
- Dus $x = \frac{1}{4}$ of $x = 2\frac{1}{4}$; de x -coördinaat van B is $2\frac{1}{4}$ ($x = \frac{1}{4}$ voldoet niet) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

3 maximumscore 4

- (Voor grote waarden van x geldt $\frac{3}{4x-3} \approx 0$, dus) de horizontale asymptoot heeft vergelijking $y=1$ (en dit is de y -coördinaat van S) 1
- ($4x-3=0$ voor $x=\frac{3}{4}$, dus) de verticale asymptoot heeft vergelijking $x=\frac{3}{4}$ 1
- R heeft y -coördinaat $g\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{\frac{3}{4}}$ 1
- De afstand is dus $1-\sqrt{\frac{3}{4}}$ (of een gelijkwaardige vorm) 1

Twee cirkels en twee lijnen

4 maximumscore 3

- ($y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ invullen in $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$ geeft voor de snijpunten van c_1 en k) $x^2 - 4x + \left(\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}\right) = -8$ 1
- $1\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} = 0$ (of een gelijkwaardige vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$) 1
- $D = \left(-2\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{4} = 0$, dus k raakt cirkel c_1 1

of

- ($y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ invullen in $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$ geeft voor de snijpunten van c_1 en k) $x^2 - 4x + \left(\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}\right) = -8$ 1
- $1\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} = 0$ (of een gelijkwaardige vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$) 1
- Exact oplossen geeft (één oplossing, namelijk) $x = 1$, dus k raakt cirkel c_1 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

5 maximumscore 6

- Uit $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$ volgt $(x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = -8$ 1
- De coördinaten van M zijn $(2, 3)$ 1
- $(rc_k \cdot rc_l = -1, \text{ dus}) rc_l = -2$ 1
- Hieruit volgt $y_S = 7$ 1
- Voor de straal r van c_2 geldt $r^2 = 2^2 + (3-7)^2 = 20$ 1
- Een vergelijking van c_2 is $x^2 + (y-7)^2 = 20$ 1

of

- Uit $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$ volgt $(x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = -8$ 1
- De coördinaten van M zijn $(2, 3)$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat de coördinaten van T $(1, 5)$ zijn, waarbij T het raakpunt van k en c_1 is, dus de richtingscoëfficiënt van l is $\frac{3-5}{2-1} = -2$ 1
- Hieruit volgt $y_S = 7$ 1
- Een vergelijking van c_2 is van de vorm $x^2 + (y-7)^2 = r^2$; invullen van de coördinaten van M geeft $2^2 + (3-7)^2 = r^2$ 1
- Een vergelijking van c_2 is $x^2 + (y-7)^2 = 20$ 1

Opmerking

Als in de beantwoording van deze vraag gebruikgemaakt wordt van foutieve tussenantwoorden in vraag 4, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Oppervlakte onder een grafiek

6 maximumscore 2

- De x -coördinaat van de top is $-\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$ 1

- $f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + -2 + 1 = 0$ (dus de top van de parabool ligt op de x -as) 1

of

- $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$; uit $f'(x) = 0$ volgt dat de x -coördinaat van de top -2 is 1

- $f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + -2 + 1 = 0$ (dus de top van de parabool ligt op de x -as) 1

of

- De discriminant D van de vergelijking $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$ moet nul zijn 1

- $D = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$ (dus de top van de parabool ligt op de x -as) 1

of

- $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{4}(x + 2)^2$ 1

- Dus de coördinaten van de top zijn $(-2, 0)$ (dus de top van de parabool ligt op de x -as) 1

7 maximumscore 4

- $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}p + 1\right)^3 - \frac{2}{3} = 42$ geeft $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}p + 1\right)^3 = 42 \frac{2}{3}$ 1

- $\left(\frac{1}{2}p + 1\right)^3 = 64$ 1

- $\frac{1}{2}p + 1 = 4$ 1

- $p = 6$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
8	maximumscore 3	
	<ul style="list-style-type: none"> • $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{4}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Uit $1\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + b = 1\frac{9}{16}$ volgt $b = \frac{15}{16}$ (dus $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ is inderdaad een vergelijking van l) 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> • $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{4}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $y = 1\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{16} = 1\frac{9}{16}$ (en dit is de y-coördinaat van R, dus $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ is inderdaad een vergelijking van l) 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> • De vergelijking $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ moet één oplossing hebben, namelijk $x = \frac{1}{2}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • De discriminant D van de vergelijking $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} = 0$ is $D = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = 0$ (lijn l is dus een raaklijn) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $y = 1\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{15}{16} = 1\frac{9}{16}$ (dus R ligt op lijn l, dus l is de raaklijn in R, dus $y = 1\frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$ is inderdaad een vergelijking van l) 	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

9 maximumscore 5

- De oppervlakte van het gebied in figuur 1 is $(\frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + 1))^3 - \frac{2}{3} = 1\frac{7}{12}$ (of 1,5833...) 1
- De oppervlakte van vierhoek *OSMK* is gelijk aan de som van de oppervlakte van rechthoek *OSLK* en de oppervlakte van driehoek *KLM* (met *L* de loodrechte projectie van *K* op *m*) 1
- De *y*-coördinaat van *K* is $\frac{15}{16}$, de *y*-coördinaat van *M* is $(\frac{15}{16} + 1\frac{1}{4} =) 2\frac{3}{16}$ (of 2,1875) 1
- De oppervlakte van driehoek *KLM* is $(2\frac{3}{16} - \frac{15}{16}) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ (of 0,625), de oppervlakte van rechthoek *OSLK* is $(1 \cdot \frac{15}{16} =) \frac{15}{16}$ (of 0,9375) 1
- $\frac{\frac{5}{8} + \frac{15}{16} - 1\frac{7}{12}}{1\frac{7}{12}} \cdot 100 (= -1,31\dots)$, dus de afwijking is (-)1,3(%) 1

of

- De oppervlakte van het gebied in figuur 1 is $(\frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + 1))^3 - \frac{2}{3} = 1\frac{7}{12}$ (of 1,5833...) 1
- Toelichting op de berekening van de oppervlakte van vierhoek *OSMK*, bijvoorbeeld door de basis met de gemiddelde hoogte te vermenigvuldigen 2
- De oppervlakte van vierhoek *OSMK* is gelijk aan $1\frac{9}{16} \cdot 1$ 1
- $\frac{1 \cdot 1\frac{9}{16} - 1\frac{7}{12}}{1\frac{7}{12}} \cdot 100 (= -1,31\dots)$, dus de afwijking is (-)1,3(%) 1

Opmerking

Voor het tweede antwoordelement van het tweede antwoordalternatief mag voor een niet volledig juist antwoord 1 scorepunt worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Roeien

10 maximumscore 2

- De cosinusregel in driehoek H_1K_1V geeft

$$H_1V^2 = 48^2 + 42^2 - 2 \cdot 48 \cdot 42 \cdot \cos(60^\circ)$$
 1
- ($H_1V^2 = 2052$, dus) $H_1V = \sqrt{2052}$ (cm) (of een gelijkwaardige vorm) 1

11 maximumscore 5

- $A_1V = \sqrt{45,3^2 - 15^2} = 42,74\dots$ 1
- $H_3V = \sqrt{(45 + 42,74\dots)^2 + 15^2} = 89,01\dots$ 1
- De cosinusregel in driehoek H_3K_3V geeft

$$89,01\dots^2 = 48^2 + 42^2 - 2 \cdot 48 \cdot 42 \cdot \cos \angle H_3K_3V$$
 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- (Hieruit volgt $\angle H_3K_3V = 163,0\dots(^\circ)$) dus het eindantwoord is $163(^\circ)$ 1

Opmerking

Als een kandidaat gerekend heeft met de waarde $\sqrt{2052}$ voor H_1V , hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een sinusoïde en nog een sinusoïde

12 maximumscore 6

- De periode van f is $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$ 1
- Dus $x_A = (\frac{8}{2}) = 4$ 1
- $x_B = 8 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 10$ 1
- $y_B = 3$ (want de evenwichtsstand is 0 en de amplitude is 3) 1
- $\tan(\alpha) = \frac{3}{10-4} (= \frac{1}{2})$ 1
- (Hieruit volgt $\alpha = 26,5\dots(^{\circ})$) dus het eindantwoord is $27(^{\circ})$ 1

of

- Voor x_A geldt $3\sin(\frac{1}{4}\pi x) = 0$, waaruit volgt $\frac{1}{4}\pi x = 0 + k \cdot \pi$ (of $\frac{1}{4}\pi x = \pi$) 1
- Voor x_B geldt $3\sin(\frac{1}{4}\pi x) = 3$, waaruit volgt $\frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (of $\frac{1}{4}\pi x = 2\frac{1}{2}\pi$) 1
- Dit geeft $x_A = 4$ en $x_B = 10$ 1
- $y_B = 3$ (want de evenwichtsstand is 0 en de amplitude is 3) 1
- $\tan(\alpha) = \frac{3}{10-4} (= \frac{1}{2})$ 1
- (Hieruit volgt $\alpha = 26,5\dots(^{\circ})$) dus het eindantwoord is $27(^{\circ})$ 1

13 maximumscore 7

- De evenwichtsstand is $\frac{1\frac{1}{2} + -1}{2} = \frac{1}{4}$, dus $d = \frac{1}{4}$ 1
- De amplitude is $1\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$, dus $a = 1\frac{1}{4}$ 1
- $3\sin(\frac{1}{4}\pi x) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\sin(\frac{1}{4}\pi x) = \frac{1}{2}$ 1
- Hieruit volgt $\frac{1}{4}\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{4}\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ 1
- Dit geeft $x_K = \frac{2}{3}$ en $x_L = 11\frac{1}{3}$ 1
- (K is de eerste top rechts van de y -as, dus) $c = \frac{2}{3}$ 1
- De periode is $11\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 10\frac{2}{3}$, dus $b = \frac{2\pi}{10\frac{2}{3}} = \frac{3}{16}\pi$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Driehoek met maximale oppervlakte

14 maximumscore 4

- $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2$ (of een gelijkwaardige vorm) 1
- $1\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2 = 0$ geeft $1\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2$ 1
- Dit geeft $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$, dus $x = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{16}$ 1
- Dus $y = 2\frac{1}{8}$ (dus $T\left(\frac{9}{16}, 2\frac{1}{8}\right)$) 1

15 maximumscore 4

- $AP = f(x)$ 1
- De oppervlakte van driehoek OAP is $\frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$ 1
- Beschrijven hoe hiervan het maximum gevonden kan worden 1
- Het eindantwoord is 1,285 1

De invloed van leeftijd op hardloopprestaties

16 maximumscore 5

- De groeifactor per jaar is 0,992 1
- Volgens model 1 is zijn gemiddelde snelheid na 12 jaar gelijk aan $19,5 \cdot 0,992^{12}$ (=17,70...) (km/uur) 1
- Dat geeft een tijd van $\frac{21,0975}{17,70...}$ (=1,19...) (uur) 1
- Dit is gelijk aan $1,19... \cdot 60 \cdot 60 = 4289,0...$ (seconden) 1
- Zijn werkelijke tijd was $60 \cdot 60 + 10 \cdot 60 + 4 = 4204$ (seconden), dus hij was $(4289 - 4204 =) 85$ (seconden) sneller dan model 1 voorspelt 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

17 maximumscore 6

- De groeifactor per 13 jaar is gelijk aan $\frac{0,9039}{0,9920}$ (= 0,9111...) 1
 - De groeifactor per jaar is gelijk aan $0,9111...^{\frac{1}{13}}$ (= 0,9928...) 1
 - Het correctiegetal voor 47-jarigen is $0,9920 \cdot 0,9928...^{11} = 0,9169...$ (of $\frac{0,9039}{0,9928...^2} = 0,9169...$) 1
 - Het omrekenen van de tijd van Laros naar een tijd die hoort bij een 30-jarige met een gelijkwaardige prestatie: $4279 \cdot 0,9169... = 3923,...$ (s) 1
 - Het omrekenen van de tijd van Meijwes naar een tijd die hoort bij een 30-jarige met een gelijkwaardige prestatie: $4130 \cdot 0,9920 = 4096,...$ (s) 1
 - (Een tijd van 3923,... seconden is beter dan een tijd van 4096,... seconden, dus) Laros heeft de beste prestatie geleverd 1
- of
- De groeifactor per 13 jaar is gelijk aan $\frac{0,9039}{0,9920}$ (= 0,9111...) 1
 - De groeifactor per jaar is gelijk aan $0,9111...^{\frac{1}{13}}$ (= 0,9928...) 1
 - Het inzicht dat de tijd van een 47-jarige omgerekend kan worden naar een tijd die hoort bij een 36-jarige met een gelijkwaardige prestatie 1
 - Het correctiegetal hiervoor is $0,9928...^{11}$ (= 0,9243...) 1
 - Het omrekenen van de tijd van Laros naar een tijd die hoort bij een 36-jarige met een gelijkwaardige prestatie: $4279 \cdot 0,9243... = 3955,...$ (s) 1
 - (Een tijd van 3955,... seconden is beter dan een tijd van 4130 seconden, dus) Laros heeft de beste prestatie geleverd 1

Opmerking

Als correctiegetallen in de berekening worden afgerond op vier decimalen en daarmee verder wordt gerekend, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Bronvermeldingen

Roeien

foto

bron: Shutterstock stockillustratie-id: 182906012, fotograaf Serghei Starus