Vraag	Antwoord	Scores

Piano

1 maximumscore 4

- (Voor de groeifactor g geldt) $g^{48} = \frac{440}{27,5}$ $(=16)$ 1
- $g = \left(\frac{440}{27,5}\right)^{\frac{1}{48}}$ 1
- $g = 1,05946...$ 1
- Het gevraagde percentage is 5,95(%) 1

2 maximumscore 5

- De vergelijkingen $440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)} = 20$ en $440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)} = 20\,000$ moeten worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijkingen kunnen worden opgelost 1
- Dit geeft respectievelijk $m = 15,4...$ en $m = 135,0...$ 1
- Het laagste MIDI-nummer is dus 16, het hoogste 135 1
- Het antwoord: 120 (toetsen) 1

of

- De vergelijkingen $440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)} = 20$ en $440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)} = 20\,000$ moeten worden opgelost 1
- $m = 15$ geeft $f = 19,...$; $m = 16$ geeft $20,...$ 1
- $m = 135$ geeft $f = 19\,912,...$; $m = 136$ geeft $21\,096,...$ 1
- Het laagste MIDI-nummer is dus 16, het hoogste 135 1
- Het antwoord: 120 (toetsen) 1

of

- Uit $f = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)}$ volgt $2^{\frac{1}{12}(m-69)} = \frac{f}{440}$; dit geeft $\frac{1}{12}(m-69) = {}^{2}\log\left(\frac{f}{440}\right)$ 1
- Hieruit volgt $m = 12 \cdot {}^{2}\log\left(\frac{f}{440}\right) + 69$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- $f = 20$ en $f = 20\,000$ invullen geeft respectievelijk $m = 15,4...$ en $m = 135,0...$ 1
- Het laagste MIDI-nummer is dus 16, het hoogste 135 1
- Het antwoord: 120 (toetsen) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Twee paren punten op een cirkel

3 maximumscore 5

- Lijn l heeft een vergelijking van de vorm $y=-x+b$ en gaat door het punt $(4, 4)$, dus $y=-x+8$ 1
- $y=-x+8$ snijden met $x^2+y^2-10x+16y=56$ geeft $x^2+\left(-x+8\right)^2-10x+16\left(-x+8\right)=56$ 1
- Deze vergelijking herleiden tot $2x^2-42x+136=0$ 1
- Herleiden tot $(x-4)(x-17)=0$ 1
- De x-coördinaat van B is 17 (want $x=4$ hoort bij A) en de y-coördinaat is -9 (dus $B(17,-9)$) 1

4 maximumscore 6

- Uit $x^2+y^2-10x+16y=56$ volgt $\left(x-5\right)^2-25+\left(y+8\right)^2-64=56$ 1
- (Hieruit volgt $\left(x-5\right)^2+\left(y+8\right)^2=145$ en dus) $M\left(5,-8\right)$ 1
- De helling van CM is $\frac{0--8}{-4-5}=-\frac{8}{9}$ $(=-0,888...)$ 1
- De tangens van de hellingshoek van CM is $-\frac{8}{9}$, dus de hellingshoek van CM is $-41,63...°$ (dus $\angle DCM=41,63...°$) 1
- $\angle CDM=(\angle DCM=)\,41,63...°$ 1
- Dus $\angle CMD=180-2\cdot 41,63...\approx 96,7(°)$ 1

of

- Uit $x^2+y^2-10x+16y=56$ volgt $\left(x-5\right)^2-25+\left(y+8\right)^2-64=56$ 1
- (Hieruit volgt $\left(x-5\right)^2+\left(y+8\right)^2=145$ en dus) $M\left(5,-8\right)$ 1
- De helling van CM is $\frac{0--8}{-4-5}=-\frac{8}{9}$ $(=-0,888...)$ 1
- De helling van DM is $\frac{0--8}{14-5}=\frac{8}{9}$ $(=0,888...)$ 1
- De tangens van de hellingshoek van CM is $-\frac{8}{9}$, dus de hellingshoek van CM is $-41,63...°$ (dus $\angle DCM=41,63...°$); de tangens van de hellingshoek van DM is $\frac{8}{9}$, dus de hellingshoek van DM is $41,63...°$ (dus $\angle CDM=41,63...°$) 1
- Dus $\angle CMD=180-2\cdot 41,63...\approx 96,7(°)$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Vanwege symmetrie geldt $x_M = \frac{-4+14}{2} = 5$ 1
- $x = 5$ invullen in de vergelijking van *c* geeft $y^2 + 16y - 81 = 0$; het gemiddelde van de oplossingen geeft y_M, dus $y_M = \frac{-16}{2} = -8$ 1
- De helling van *CM* is $\frac{0--8}{-4-5} = -\frac{8}{9}$ $(= -0{,}888...)$ 1
- De tangens van de hellingshoek van *CM* is $-\frac{8}{9}$, dus de hellingshoek van *CM* is $-41{,}63...°$ (dus $\angle DCM = 41{,}63...°$) 1
- $\angle CDM = (\angle DCM =)\, 41{,}63...°$ 1
- Dus $\angle CMD = 180 - 2 \cdot 41{,}63... \approx 96{,}7(°)$ 1

of

- Uit $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$ volgt $(x-5)^2 - 25 + (y+8)^2 - 64 = 56$ 1
- Hieruit volgt $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 145$ en dus $CM = \sqrt{145}$ $(= 12{,}04...)$ 1
- $CD = 14 - -4 = 18$ 1
- Als *N* het midden van *CD* is, dan ($\angle MNC = 90°$, dus) $\sin(\angle CMN) = \frac{9}{\sqrt{145}}$ 1
- Hieruit volgt $\angle CMN = 48{,}36...°$ 1
- Dus $\angle CMD = 2 \cdot 48{,}36... \approx 96{,}7(°)$ 1

of

- Uit $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$ volgt $(x-5)^2 - 25 + (y+8)^2 - 64 = 56$ 1
- Hieruit volgt $(x-5)^2 + (y+8)^2 = 145$ en dus $CM = DM = \sqrt{145}$ $(= 12{,}04...)$ 1
- $CD = 14 - -4 = 18$ 1
- $18^2 = \left(\sqrt{145}\right)^2 + \left(\sqrt{145}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{145} \cdot \sqrt{145} \cdot \cos(\angle CMD)$ 1
- Hieruit volgt $\cos(\angle CMD) = \frac{-17}{145}$ 1
- Dus $\angle CMD \approx 96{,}7(°)$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Logaritme van een kwadratische functie

5 maximumscore 3

- (Voor de verticale asymptoot zou moeten gelden) $x^2 - 3x + 3 = 0$ — 1
- De discriminant van deze vergelijking is gelijk aan $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$ — 1
- Dit is kleiner dan nul, dus de vergelijking heeft geen oplossingen (en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot) — 1

of

- De grafiek van $y = x^2 - 3x + 3$ is een dalparabool — 1
- $x_{\text{top}} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$ (of $2x - 3 = 0$ geeft $x_{\text{top}} = \frac{3}{2}$) — 1
- $y_{\text{top}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{4}$; dit is groter dan nul, dus $x^2 - 3x + 3$ kan niet nul zijn (en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot) — 1

of

- (Voor de verticale asymptoot zou moeten gelden) $x^2 - 3x + 3 = 0$ — 1
- $x^2 - 3x + 3 = \left(x - 1\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ — 1
- Dit is (voor elke waarde van x) positief, dus de vergelijking heeft geen oplossingen (en dus heeft de grafiek van f geen verticale asymptoot) — 1

6 maximumscore 5

- De vergelijking ${}^2\log\left(x^2 - 3x + 3\right) = 0$ moet worden opgelost — 1
- Dit geeft $x^2 - 3x + 3 = 1$ — 1
- Herleiden tot $(x-2)(x-1) = 0$ — 1
- Dit geeft $x = 2$ of $x = 1$ — 1
- (De grafiek van g gaat door $(4, 0)$), dus $a = (4 - 2 =)\, 2$ of $a = (4 - 1 =)\, 3$ — 1

of

- Een functievoorschrift van g is $g(x) = {}^2\log\left((x-a)^2 - 3(x-a) + 3\right)$ — 1
- (De grafiek van g gaat door $(4, 0)$), dus er moet gelden ${}^2\log\left((4-a)^2 - 3(4-a) + 3\right) = 0$ — 1
- $(4-a)^2 - 3(4-a) + 3 = 1$ — 1
- Herleiden tot $a^2 - 5a + 6 = 0$, dus $(a-2)(a-3) = 0$ — 1
- Dus $a = 2$ of $a = 3$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Trapezium

7 maximumscore 4

- Volgens de sinusregel geldt in ΔABC: $\dfrac{6}{\sin\left(\angle ACB\right)} = \dfrac{5}{\sin\left(55°\right)}$ 1
- Hieruit volgt $\sin\left(\angle ACB\right) = 0{,}982...$ 1
- $\angle ACB = 100{,}585...°$ ($\angle ACB = 79{,}414...°$ voldoet niet) 1
- Dus $\angle BAC = 180 - 55 - 100{,}585... \approx 24{,}415°$ 1

of

- Volgens de cosinusregel geldt in ΔABC:
  $5^2 = 6^2 + BC^2 - 2 \cdot 6 \cdot BC \cdot \cos(55°)$ 1
- $BC^2 - 12\cos(55°) \cdot BC + 11 = 0$ geeft
  $BC = \dfrac{12\cos(55°) \pm \sqrt{(-12\cos(55°))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2}$ (dus $BC = 2{,}522...$
  ($4{,}359...$ voldoet niet)) 1
- Volgens de cosinusregel geldt in ΔABC:
  $2{,}522...^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\left(\angle BAC\right)$ 1
- Hieruit volgt $\cos\left(\angle BAC\right) = 0{,}910...$, dus $\angle BAC \approx 24{,}415°$ 1

of

- Volgens de cosinusregel geldt in ΔABC:
  $5^2 = 6^2 + BC^2 - 2 \cdot 6 \cdot BC \cdot \cos(55°)$ 1
- $BC^2 - 12\cos(55°) \cdot BC + 11 = 0$ geeft
  $BC = \dfrac{12\cos(55°) \pm \sqrt{(-12\cos(55°))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2}$ (dus $BC = 2{,}522...$
  ($4{,}359...$ voldoet niet)) 1
- Volgens de sinusregel geldt in ΔABC: $\dfrac{2{,}522...}{\sin(\angle BAC)} = \dfrac{5}{\sin(55°)}$ 1
- Hieruit volgt $\sin(\angle BAC) = 0{,}413...$, dus $\angle BAC \approx 24{,}415°$
  ($\angle BAC = 155{,}585...°$ voldoet niet) 1

Vraag	Antwoord	Scores

8 maximumscore 5

- Er geldt $\sin(24,4...°) = \frac{h}{5}$; hieruit volgt $h = 2,0...$ — 1
- Als D' de loodrechte projectie van D op AB is, dan geldt $AD' = \sqrt{3^2 - 2,0...^2} = 2,1...$ — 1
- Als C' de loodrechte projectie van C op AB is, dan geldt $\tan(55°) = \frac{2,0...}{BC'}$; hieruit volgt $BC' = 1,4...$ — 1
- Dus $CD = 6 - 2,1... - 1,4... = 2,3...$ — 1
- De oppervlakte van het trapezium is $2,0... \cdot \frac{6 + 2,3...}{2} \approx 8,7$ — 1

of

- Er geldt $\sin(24,4...°) = \frac{h}{5}$; hieruit volgt $h = 2,0...$ — 1
- $\angle ACD$ en $\angle BAC$ zijn Z-hoeken, dus $\angle ACD = \angle BAC = 24,4...°$ — 1
- Volgens de cosinusregel geldt in ΔACD: $3^2 = CD^2 + 5^2 - 2 \cdot CD \cdot 5 \cdot \cos(24,4...°)$ — 1
- Hieruit volgt (bijvoorbeeld met de GR) $CD = 2,3...$ ($6,7...$ voldoet niet) — 1
- De oppervlakte van het trapezium is $2,0... \cdot \frac{6 + 2,3...}{2} \approx 8,7$ — 1

of

- Er geldt $\sin(24,4...°) = \frac{h}{5}$; hieruit volgt $h = 2,0...$ — 1
- Als D' de loodrechte projectie van D op AB is, dan geldt $\sin(\angle DAD') = \frac{2,0...}{3}$; hieruit volgt $\angle DAD' = 43,5...°$ ($\angle DAD' = 136,4...°$ voldoet niet) — 1
- Dus $\angle DAC = 43,5... - 24,4... = 19,1...°$ — 1
- Volgens de cosinusregel geldt in ΔACD: $CD^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(19,1...°) = 5,6...$, dus $CD = 2,3...$ — 1
- De oppervlakte van het trapezium is $2,0... \cdot \frac{6 + 2,3...}{2} \approx 8,7$ — 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Een berekening waaruit volgt dat $BC = 2,5...$; dan geldt $\sin(55°) = \frac{h}{2,5...}$; hieruit volgt $h = 2,0...$ — 1
- Als D' de loodrechte projectie van D op AB is, dan geldt $AD' = \sqrt{3^2 - 2,0...^2} = 2,1...$ — 1
- Als C' de loodrechte projectie van C op AB is, dan geldt $BC' = \sqrt{2,5...^2 - 2,0...^2} = 1,4...$ — 1
- Dus $CD = 6 - 2,1... - 1,4... = 2,3...$ — 1
- De oppervlakte van het trapezium is $2,0... \cdot \frac{6 + 2,3...}{2} \approx 8,7$ — 1

Opmerkingen

– *Als de lengte van BC bij de vorige vraag berekend is, dan mag het resultaat van die berekening bij deze vraag gebruikt worden.*

– *Als uitgegaan wordt van $\angle BAC = 24,41°$, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

Vraag	Antwoord	Scores

Productiviteit

9 maximumscore 4

- Beschrijven hoe het maximum van P met de GR kan worden gevonden — 1
- Dit geeft (de ideale temperatuur) $T = 21,65...$ (°C) — 1
- $P(19,65...) = 99,2...$ (%) en $P(23,65...) = 99,3...$ (%) — 1
- De conclusie: de productiviteit neemt het meest af bij twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur — 1

of

- $P' = 0,01869T^2 - 1,16548T + 16,47524$ — 1
- $P' = 0$ geeft (op het gegeven domein) (de ideale temperatuur) $T = 21,65...$ (°C) — 1
- $P(19,65...) = 99,2...$ (%) en $P(23,65...) = 99,3...$ (%) — 1
- De conclusie: de productiviteit neemt het meest af bij twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur — 1

10 maximumscore 3

- $P(30) = 91,234...$ en $P(35) = 83,121...$ — 1
- $a = \dfrac{83,121... - 91,234...}{35 - 30} = -1,622...$, dus $a \approx -1,623$ — 1
- Invullen van $T = 30$ en $P = 91,234...$ (of $T = 35$ en $P = 83,121...$) in $P = -1,622... \cdot T + b$ geeft $b \approx 139,9$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Sinus

11 maximumscore 3

- Uit de vergelijking $3\sin(\pi x) = \frac{3}{2}$ volgt $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$ 1
- $\pi x = \frac{1}{6}\pi$ of $\pi x = \frac{5}{6}\pi$ (of: $\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$) 1
- De x-coördinaat van P is $x = \frac{1}{6}$ en de x-coördinaat van Q is $x = \frac{5}{6}$ 1

12 maximumscore 4

- De periode van f is ($\frac{2\pi}{\pi} =$) 2 (en de grafiek van f gaat door de evenwichtstand omhoog in O) 1
- Hieruit volgt $x_A = 1$ 1
- De amplitude van f is 3 (en $x_T = \frac{1+0}{2}$), dus de coördinaten van T zijn $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 1
- Invullen van $x = 1$ en $y = 0$ in $g(x) = ax^3 + bx$ geeft $a + b = 0$; invullen van $x = \frac{1}{2}$ en $y = 3$ geeft $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$ 1

of

- Voor x_A geldt $3\sin(\pi x) = 0$ dus $\sin(\pi x) = 0$ 1
- Hieruit volgt x_A ($= \frac{\pi}{\pi}$) $= 1$ 1
- Uit de vergelijking $3\sin(\pi x) = 3$ volgt $\sin(\pi x) = 1$ en dit geeft x ($= \frac{\frac{1}{2}\pi}{\pi}$) $= \frac{1}{2}$, dus de coördinaten van T zijn $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 1
- Invullen van $x = 1$ en $y = 0$ in $g(x) = ax^3 + bx$ geeft $a + b = 0$; invullen van $x = \frac{1}{2}$ en $y = 3$ geeft $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$ 1

13 maximumscore 3

- Uit $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$ volgt $a + 4b = 24$, dus $(a + 4b) - (a + b) = 24$ 1
- Dus $3b = 24$, dus $b = 8$ 1
- Hieruit volgt $a = -8$ (en $b = 8$) 1

of

- Uit $a + b = 0$ volgt $a = -b$, dus $-\frac{1}{8}b + \frac{1}{2}b = 3$ 1
- Dus $\frac{3}{8}b = 3$, dus $b = 8$ 1
- Hieruit volgt $a = -8$ (en $b = 8$) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Gebroken functies

14 maximumscore 4

- De vergelijking $x+\frac{1}{x}=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$ moet worden opgelost — 1
- Hieruit volgt $\frac{3}{4}x=\frac{3}{x}$ (of bijvoorbeeld $\frac{x}{4}=\frac{1}{x}$) — 1
- Dit geeft $x^2=4$ — 1
- Dit geeft (met domein $\langle 0,\rightarrow\rangle$) $x=2$ — 1

15 maximumscore 3

- ($h(x)=\frac{1}{a}x+ax^{-1}$, dus) $h'(x)=\frac{1}{a}-ax^{-2}$ (of een vergelijkbare vorm) — 1
- $h'(x)=\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}$ — 1
- $h'(x)=\frac{x^2}{ax^2}-\frac{a^2}{ax^2}=\frac{x^2-a^2}{ax^2}$ — 1

16 maximumscore 4

- Uit $h'(x)=0$ volgt $x^2-a^2=0$ — 1
- Hieruit volgt $x^2=a^2$, dus (met $a>0$ en domein $\langle 0,\rightarrow\rangle$) $x=a$ — 1
- (De y-coördinaat van de top van de grafiek van h is) $h(a)=\frac{a}{a}+\frac{a}{a}$ — 1
- Dit is gelijk aan $(1+1=)$ 2 (dus is voor elke waarde van a, met $a>0$, de y-coördinaat van de top van de grafiek van h gelijk aan 2) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Macht en lijnen

17 maximumscore 3

- Uit $\frac{3}{16x^4} = \frac{1}{32}$ volgt $x^4 = 6$ — 1
- Dit geeft $x = -\sqrt[4]{6}$ of $x = \sqrt[4]{6}$ — 1
- De afstand tussen de twee punten is $2\sqrt[4]{6}$ — 1

18 maximumscore 5

- $f(x) = \frac{3}{16}x^{-4}$ — 1
- $f'(x) = -\frac{12}{16}x^{-5}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1
- $f'(1) = -\frac{3}{4}$ — 1
- Dus l heeft een vergelijking van de vorm $y = -\frac{3}{4}x + b$ — 1
- Invullen van de coördinaten van A in $y = -\frac{3}{4}x + b$ geeft $b = \frac{15}{16}$, dus de y-coördinaat van B is $\frac{15}{16}$ (of $B(0, \frac{15}{16})$) — 1