Tornadoschalen

In tornado's kunnen hoge windsnelheden bereikt worden. De zwaarte of heftigheid van een tornado wordt **intensiteit** genoemd. Er zijn verschillende schalen om de intensiteit van een tornado uit te drukken in een getal.

foto

Zo is er de Fujita-schaal die in 1971 is ontwikkeld. Voor de intensiteit op de Fujita-schaal geldt de volgende formule:

$$F = \left(\frac{v}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2 \qquad (1)$$

Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en F de intensiteit van de tornado op de Fujita-schaal. F wordt afgerond op een geheel getal.

In een zware tornado worden maximale windsnelheden van ongeveer 280 km/u bereikt.

3p **1** Bereken de intensiteit van deze tornado op de Fujita-schaal.

Een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal komt niet zo vaak voor.

4p **2** Bereken de minimale waarde van v in zo'n tornado. Rond je antwoord af op één decimaal.

Een andere schaal voor de intensiteit van tornado's is de in 1972 ontwikkelde Torro-schaal T. Het verband tussen v en T wordt gegeven door de formule:

$$v = 2{,}39 \cdot (T + 4)^{\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

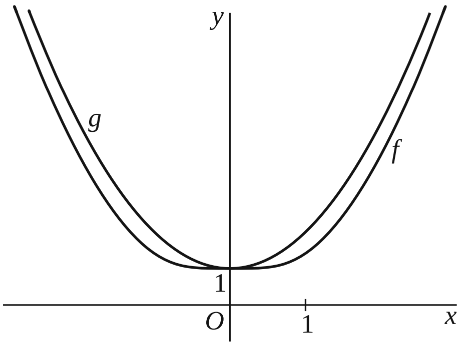
Hierin is v de maximale windsnelheid in de tornado in m/s en T de intensiteit van de tornado op de Torro-schaal. T wordt afgerond op een geheel getal.
Door formule (2) in te vullen in formule (1) en vervolgens de ontstane formule te herleiden, kan worden aangetoond dat er een lineair verband bestaat tussen de onafgeronde F- en T-waarden. Dit lineaire verband kan worden beschreven met een formule van de vorm $F = aT + b$.

4p **3** Bereken de waarden van a en b. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Wortel en parabool

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\sqrt{x^4+1}$ en $g(x)=x^2+1$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend.

figuur 1



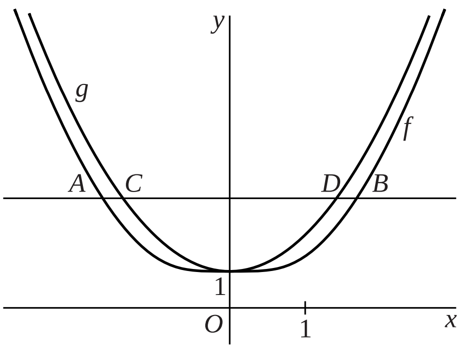
De grafieken van f en g hebben precies één punt gemeenschappelijk.

4p **4** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

3p **5** Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 1.

De horizontale lijn met vergelijking $y=3$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B en de grafiek van g in de punten C en D. Zie figuur 2.

figuur 2



6p **6** Bereken exact de lengte van lijnstuk DB.

Hearst Tower

In 2006 is in New York de Hearst Tower gebouwd op de plek waar sinds 1928 het Hearst Building staat. Bij de bouw van de Hearst Tower zijn alleen de buitenmuren van het Hearst Building blijven staan.

De Hearst Tower heeft een plat dak en is 182,0 m hoog.

De gehele toren bestaat uit drie delen. Het onderste deel is het oude gebouw. Daarbovenop zit een laag die de vorm heeft van een balk. De hoogte van deze laag en het oude gebouw samen is 33,8 m. Van het bovenste deel van de toren bestaan de verticale wanden uit even grote gelijkzijdige driehoeken. Er staan negen lagen van zulke driehoeken op elkaar. Zie de foto.

foto

Uit deze gegevens volgt dat de hoogte van zo'n gelijkzijdige driehoek ongeveer 16,5 m is en dat de zijden van deze driehoek ongeveer 19,0 m lang zijn.

4p **7** Toon met berekeningen aan dat deze twee afmetingen uit de gegevens volgen.

Op de foto is te zien dat een horizontale doorsnede van het bovenste deel van de toren maximaal vier maal de lengte van zo'n driehoekszijde lang is, en maximaal drie maal de lengte van zo'n driehoekszijde breed is.

3p **8** Teken op schaal 1:1000 het bovenaanzicht van het bovenste deel van de toren. Licht je werkwijze met berekeningen toe.

Een laag van het bovenste deel van de toren heeft de vorm van een balk waaruit vier piramidevormige stukken zijn weggelaten.

5p **9** Bereken de inhoud van één zo'n laag. Geef je antwoord in duizenden m^3 nauwkeurig.

Derdegraadsfunctie en sinus

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = -x^3 + 4x$ en $g(x) = a \cdot \sin(\pi x)$.

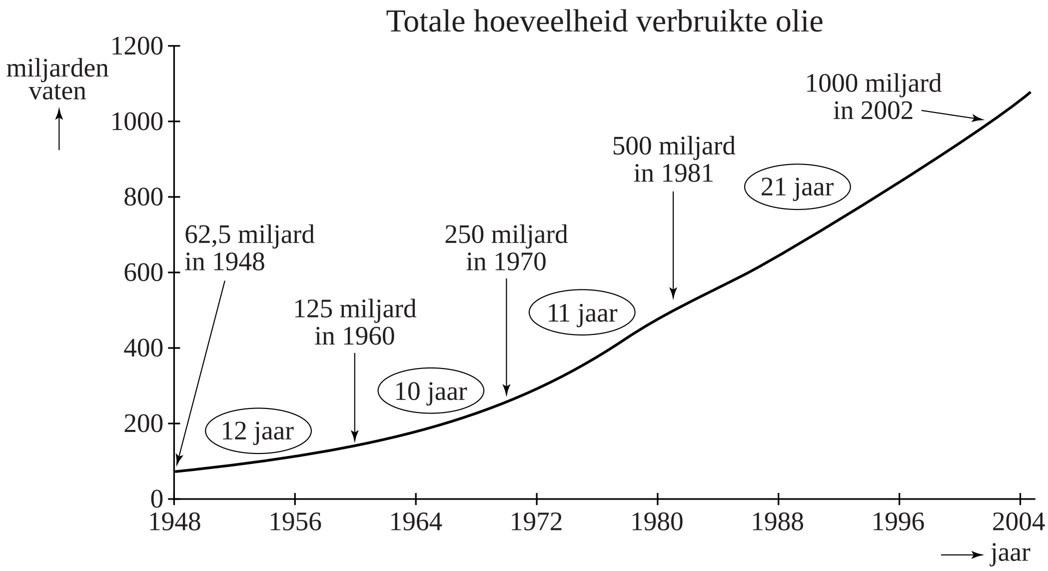
In de oorsprong zijn de hellingen van de grafieken van f en g gelijk.

6p **10** Bereken exact de waarde van a.

Olie

Olie is een belangrijke grondstof. In figuur 1 is af te lezen hoeveel olie er wereldwijd in totaal is verbruikt sinds er in 1859 voor het eerst een oliebron geslagen werd. Zo valt bijvoorbeeld af te lezen dat het totaal van 1000 miljard vaten in de loop van 2002 gepasseerd werd.

figuur 1



In de grafiek van figuur 1 zijn vanaf 1948 de perioden aangegeven waarin de totale hoeveelheid verbruikte olie verdubbelde. Tussen 1948 en 1981 duurde het telkens ongeveer 11 jaar tot de totale hoeveelheid verbruikte olie was verdubbeld. Dit betekent dat tussen 1948 en 1981 de totale hoeveelheid verbruikte olie bij benadering exponentieel groeide.

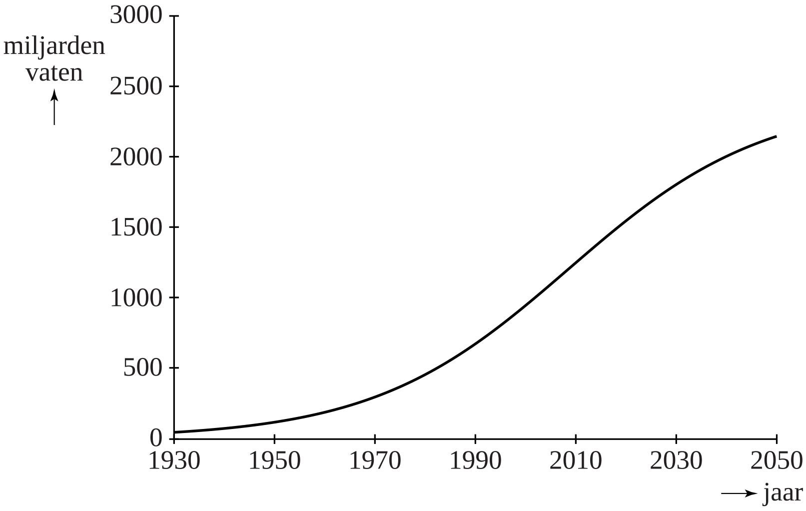
4p **11** Bereken het jaarlijkse groeipercentage dat hoort bij een verdubbelingstijd van 11 jaar. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Vanaf 1981 groeide de totale hoeveelheid verbruikte olie bij benadering nog steeds exponentieel, maar met een andere groeifactor. In de grafiek is te zien dat de totale hoeveelheid verbruikte olie verdubbelde van 500 miljard tot 1000 miljard vaten in de periode van 1981 tot 2002. Een verdubbelingstijd van 21 jaar komt overeen met een groei van ongeveer 3,4% per jaar.

4p **12** Bereken op algebraïsche wijze het jaar waarin volgens dit exponentiële model de totale hoeveelheid verbruikte olie de grens van 750 miljard vaten passeerde.

Er zijn in de loop der jaren verschillende modellen gemaakt die het verbruik van olie voorspellen. Een van deze modellen is het model van Hubbert uit 1956. In figuur 2 zie je een grafiek die uit dit model volgt.

figuur 2



Deze grafiek hoort bij de totale hoeveelheid olie die tot dat moment verbruikt is. Een formule voor deze totale hoeveelheid is:

$$V = \frac{2400}{1 + 56 \cdot 0{,}95^t}$$

Hierin is V de totale hoeveelheid verbruikte olie in miljarden vaten en t de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 1930.

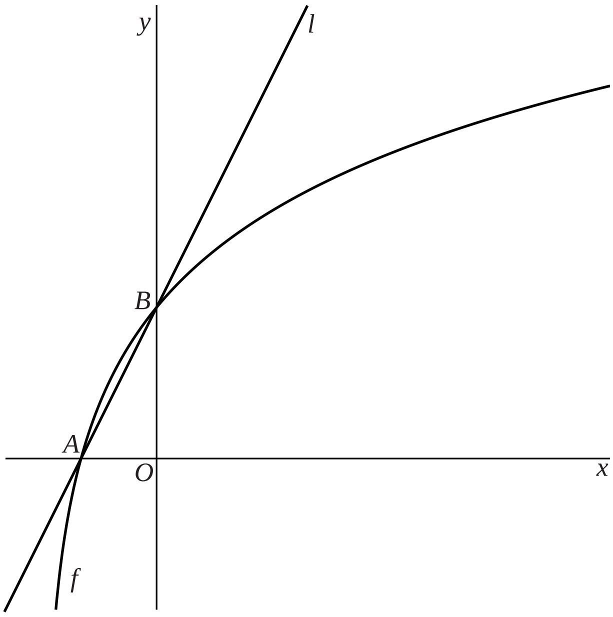
De totale hoeveelheid winbare olie in de wereld wordt geschat op 2400 miljard vaten.

4p **13** Bereken in welk jaar deze geschatte voorraad volgens het model van Hubbert voor de helft verbruikt was.

Grafiek van een logaritme

De functie f is gegeven door $f(x) = {}^{3}\log(4x+3)$. De grafiek van f snijdt de x-as in punt A en de y-as in punt B.
Verder is l de lijn door A en B. Zie de figuur.

figuur



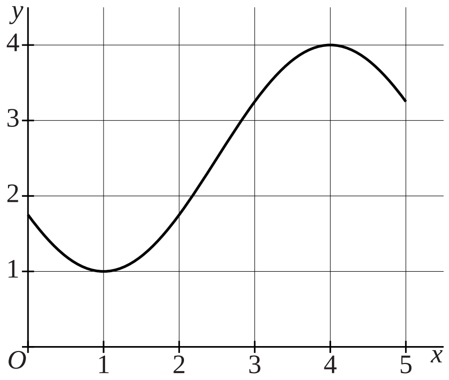
5p **14** Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op voor l.

3p **15** Bereken de helling van de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 1.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

Grafiek van een cosinus

In de figuur is op het interval $[0, 5]$ een sinusoïde getekend.

figuur



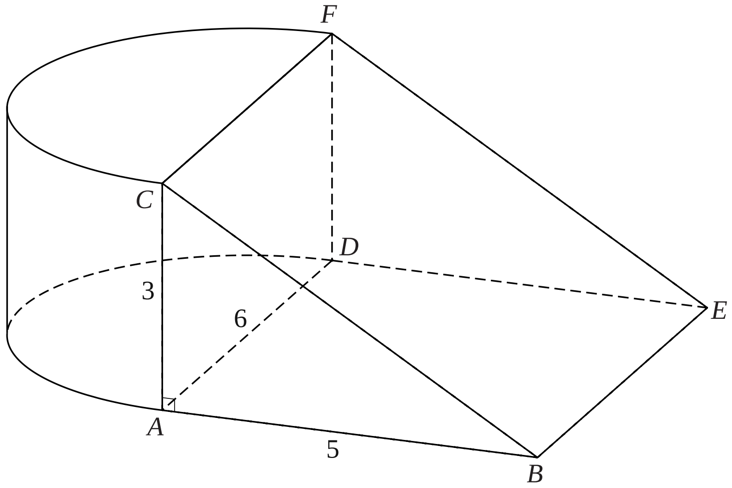
Deze sinusoïde is te beschrijven met een vergelijking van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$.

5p **16** Bepaal geschikte waarden van a, b, c en d zodat $y = a + b\cos(c(x - d))$ een vergelijking is van deze sinusoïde. Licht je werkwijze toe.

Lichaam

Gegeven is een lichaam L dat bestaat uit een prisma $ABC.DEF$ en een halve cilinder. Hierin is $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $AD = 6$ cm en hoek CAB is recht. De halve cilinder heeft middellijn AD en hoogte AC. Zie figuur 1.

figuur 1



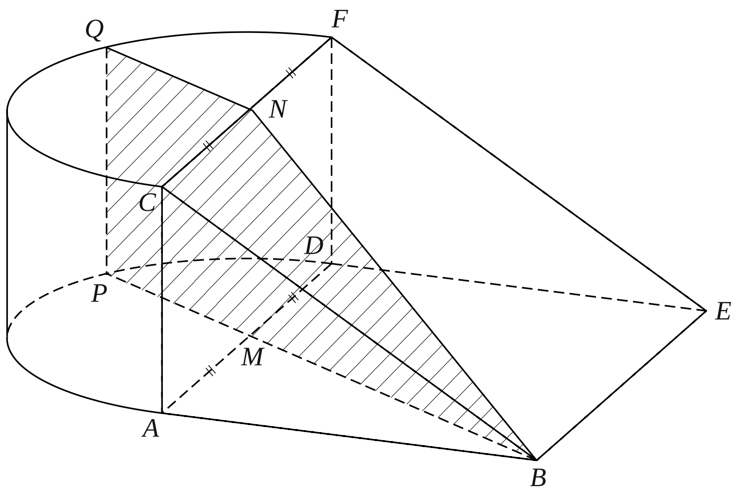
3p **17** Bereken de inhoud van L in cm^3 nauwkeurig.

Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met een uitslag van L op schaal 1:2.

6p **18** Maak de uitslag af. Zet de letters bij de hoekpunten en licht je werkwijze toe.

Punt M is het midden van AD en punt N is het midden van CF.
Lichaam L wordt doorsneden door het verticale vlak door B, M en N. De doorsnede die zo ontstaat is de vierhoek $BPQN$. Zie figuur 2.

figuur 2



4p **19** Bereken de oppervlakte van $BPQN$ in cm^2 nauwkeurig.

uitwerkbijlage

18