4 Wortelfunctie

10. Stel dat de functie f en de lijn $y = 2x - 5$ elkaar wel snijden. Dan heeft de vergelijking $f(x) = 2x - 5$ minstens één oplossing. We proberen deze oplossing te vinden:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x-12} &= 2x-5, \\ 4x-12 &= 4x^2-20x+25, \\ 0 &= 4x^2-24x+37. \end{aligned}$$

Hier hebben we eerst gekwadrateerd en toen de vergelijking omgeschreven tot de vorm $ax^2 + bx + c = 0$. Nu rekenen we de discriminant van deze vergelijking uit:

$$D = (-24)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37 = -16.$$

Een negatieve discriminant betekent dat de vergelijking geen oplossingen heeft, en dus snijden de lijn en de grafiek van f elkaar niet.

11. In het raakpunt moet de afgeleide van f gelijk zijn aan de richtingscoëfficiënt van de lijn $y = 2x + b$, oftewel 2. Je begint door f te differentiëren. Let hierbij op de kettingregel.

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x-12)^{1/2}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(4x-12)^{-1/2} \cdot 4, \\ f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{4x-12}}. \end{aligned}$$

Je wilt nu de vergelijking $f'(x) = 2$ oplossen. Dit geeft:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{2}{\sqrt{4x-12}}, \\ \sqrt{4x-12} &= 1, \\ 4x-12 &= 1^2 = 1, \\ 4x &= 1+12 = 13, \\ x &= \tfrac{13}{4} = 3\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

De functie f en de lijn $y = 2x + b$ moeten elkaar dus raken als $x = 3\frac{1}{4}$. Er moet dus gelden dat

$$\begin{aligned} f(3\tfrac{1}{4}) &= 2 \cdot 3\tfrac{1}{4} + b, \\ \sqrt{4 \cdot 3\tfrac{1}{4} - 12} &= 6\tfrac{1}{2} + b, \\ 1 &= 6\tfrac{1}{2} + b, \\ b &= -5\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

12. Je kunt de formule voor f herschrijven tot $f = \sqrt{4x-12} = \sqrt{4(x-3)} = 2\sqrt{x-3}$. Nu kun je zien dat je deze functie kunt krijgen g door de translatie $(3, 0)$, dus translatie 3 eenheden in de richting van de positieve x-as, en vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 2. Het maakt niet uit in welke volgorde je deze transformaties uitvoert.