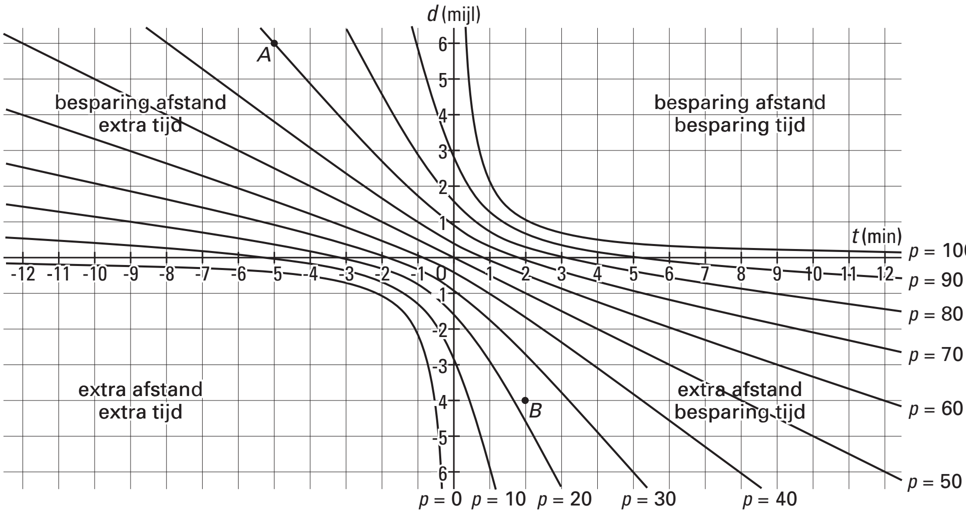
Weggebruik

Als er een nieuwe verkeersweg geopend wordt, dan zullen sommige automobilisten overstappen van hun gebruikelijke route naar deze nieuwe weg. Bij de planning van nieuwe verkeerswegen is het van belang te weten hoeveel procent van de automobilisten gebruik zal gaan maken van zo'n weg. Uit een onderzoek door Amerikaanse verkeersdeskundigen blijkt dat dit percentage (p) afhangt van de tijdwinst in minuten (t) en de afstandsbesparing in mijlen (d) die een nieuwe autoweg oplevert.
In figuur 1 is voor een aantal waarden van p in grafieken weergegeven welke waarden van d en t hierbij horen. Een negatieve waarde van d of t betekent dat er sprake is van een omweg of tijdverlies. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



In figuur 1 is een punt A getekend. In dit punt A geldt: $p = 70$, $d = 6$ en $t = -5$.
Dit betekent dat 70% van de automobilisten gebruik zal maken van de nieuwe weg dankzij de afstandsbesparing van 6 mijl en ondanks het tijdverlies van 5 minuten.

Bij de planning van een nieuwe weg kan er gekozen worden uit twee verschillende trajecten. Traject I levert een tijdsbesparing van 4 minuten op, maar wel een omweg van 2 mijl. Bij traject II is er een tijdverlies van 6 minuten, maar een afstandsbesparing van 2 mijl.

3p **1** ☐ Onderzoek met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage bij welk traject (I of II) het percentage gebruikers het grootst is.

Bij de grafieken uit figuur 1 hebben de Amerikaanse verkeersdeskundigen de volgende formule gevonden voor het verband tussen p, d en t: $p = 50 + \dfrac{50d + 25t}{\sqrt{(4{,}3 + (d - 0{,}5t)^2)}}$

In figuur 1 is tevens een punt B getekend.

3p **2** ☐ Bereken met behulp van de gegeven formule het bij punt B behorende percentage p.

4p **3** ☐ Bereken met behulp van de gegeven formule bij welke tijdsbesparing 45% van de automobilisten een omweg van 5 mijl zal accepteren.

In figuur 1 lijkt de grafiek die hoort bij $p = 50$ op een rechte lijn.

4p **4** ☐ Toon op algebraïsche wijze aan dat volgens de formule deze grafiek een rechte lijn is.

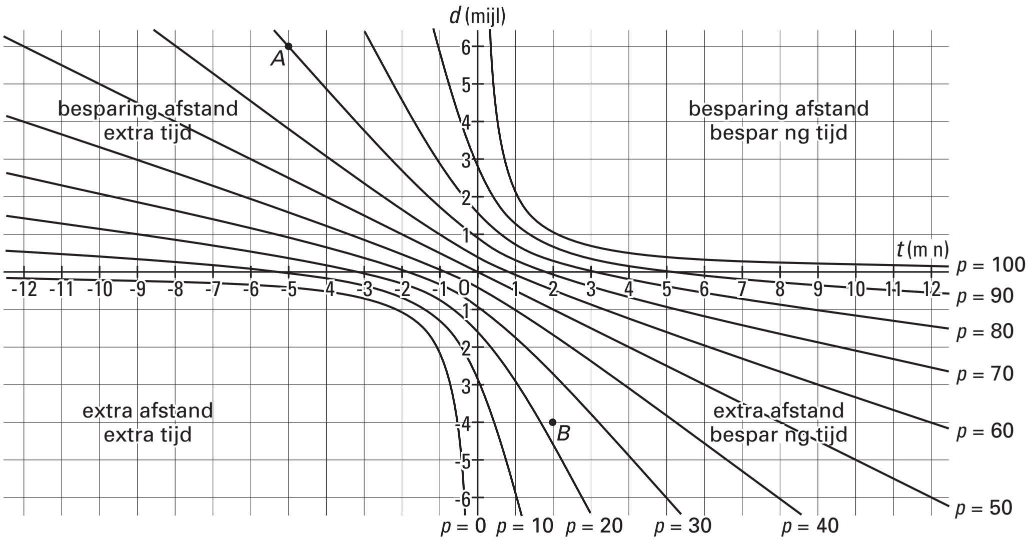
We gaan nu uit van een situatie dat de nieuwe weg reeds aangelegd is. Volgens het onderzoek is de kans dat een automobilist van deze nieuwe weg gebruik zal maken gelijk aan 80%. Ga er bij de volgende vraag van uit dat dit klopt.
Op een bepaalde dag zijn er 140 automobilisten die van de nieuwe weg gebruik zouden kunnen maken.

4p **5** ☐ Bereken de kans dat meer dan 110 van deze 140 automobilisten inderdaad gebruik zullen maken van de nieuwe weg.

wiskunde B1

Uitwerkbijlage bij vraag 1

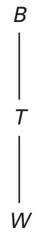
Vraag 1



Watertransport

Bij transport van water via de waterleiding wordt de druk op peil gehouden door pompen in drukstations.
In figuur 2 is een transportschema getekend. Vanaf de bron *B* wordt het water gepompt naar het drukstation *T*.
In *T* wordt het water verder gepompt naar een stadswijk *W*.

figuur 2



De kans dat er een storing optreedt op het gedeelte *BT* is 3,3% per dag. Voor het gedeelte *TW* geldt dezelfde kans op een storing.
Als er op een dag in één of in beide delen van het traject *B T W* storing is, valt de watervoorziening in wijk *W* geheel of gedeeltelijk weg. We noemen dit stagnatie.

De kans op *een dag met stagnatie* in wijk *W* is ongeveer gelijk aan 6,5%.

3p **6** ☐ Toon dit aan.

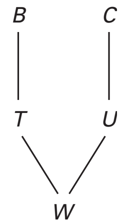
Neem bij de volgende vragen aan dat elke storing bij het begin van de volgende dag is opgeheven.

4p **7** ☐ Bereken de kans op precies één dag met stagnatie in wijk *W* in een periode van vier weken.

Het aantal dagen waarop de watervoorziening in wijk *W* stagneert, kan worden teruggebracht door de wijk ook aan te sluiten op een leiding vanuit een andere bron *C* met drukstation *U*. De watervoorziening in wijk *W* stagneert nu pas indien zowel in het traject vanuit *B*, als in het traject vanuit *C* een storing optreedt. Dit nieuwe systeem is weergegeven in figuur 3.

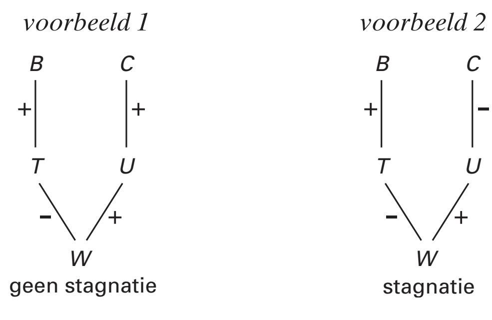
Neem aan dat op elk van de delen *CU* en *UW* de kans op een storing ook 3,3% per dag is.

figuur 3



Door bij elk gedeelte een + (transport) of een – (storing) te plaatsen kun je de verschillende situaties weergeven die zich in dit nieuwe systeem kunnen voordoen.
In figuur 4 zie je in voorbeeld 1 een situatie waarbij *geen* stagnatie in de watervoorziening in wijk *W* optreedt en in voorbeeld 2 een situatie waarbij dat *wel* zo is.

figuur 4



4p **8** ☐ Teken op soortgelijke wijze alle mogelijke situaties van het nieuwe systeem waarbij er sprake is van *geen stagnatie* in wijk *W*.

In voorbeeld 2 is sprake van stagnatie.

4p **9** ☐ Bereken de kans dat de situatie van dit gegeven voorbeeld zich voordoet.

In het oude systeem van figuur 2 is de kans op een dag met stagnatie ongeveer 6,5%. In het nieuwe systeem is deze kans kleiner. In een jaar kun je daarom met het nieuwe systeem minder dagen met stagnatie verwachten dan met het oude systeem.

5p **10** ☐ Bereken hoeveel dagen met stagnatie je minder kunt verwachten in een periode van een jaar.

Leesvaardigheid

Aan een groot aantal achtjarigen wordt op de basisschool een toets afgenomen voor het meten van de leesvaardigheid. Alle kinderen krijgen dezelfde toets.
De scores zijn bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde score van 75 en een standaardafwijking van 10. Ga bij de volgende twee vragen uit van deze normale verdeling.

Een achtjarige leerling haalt een score van 85.

4p **11** ☐ Onderzoek of deze leerling tot de 25% best lezende leerlingen van zijn leeftijdsgroep behoort.

Om het lezen te bevorderen verloot de Minister van Onderwijs 20 boeken onder alle achtjarigen die hebben meegedaan aan de leestoets.

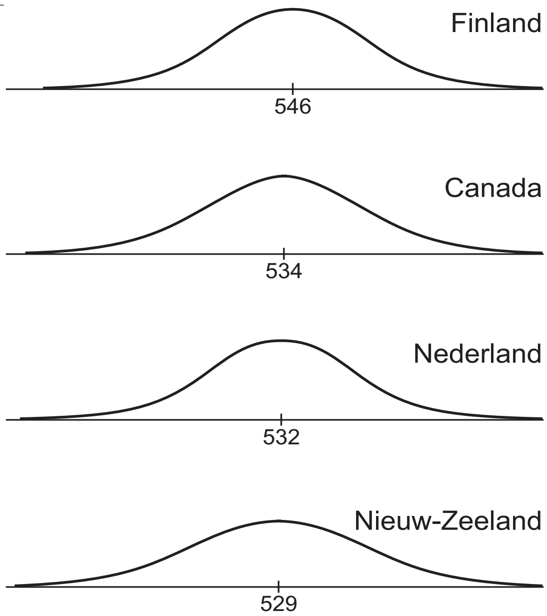
3p **12** ☐ Bereken de kans dat bij precies 10 van de 20 leerlingen die een boek geloot hebben de score voor de leestoets boven het gemiddelde lag.

In het jaar 2000 is in meer dan 30 landen een onderzoek gedaan naar de leesvaardigheid van 15- en 16-jarigen. Dit onderzoek heeft de naam PISA 2000.
In figuur 5 zijn de resultaten van de vier best presterende landen weergegeven.
Neem aan dat voor ieder land de scores normaal verdeeld zijn met de gemiddeldes die in figuur 5 staan.

Van de Nederlandse leerlingen had 44% een score die hoger lag dan de gemiddelde score van Finland.

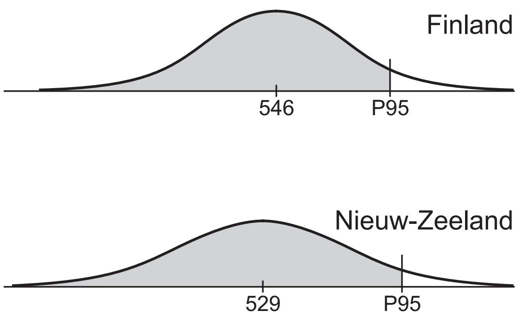
4p **13** ☐ Bereken met behulp van deze gegevens de standaardafwijking van de score van de Nederlandse leerlingen. Rond af op een geheel getal.

figuur 5



De score waar 95% van alle leerlingen onder blijft, heet P95.
Ieder land heeft zijn eigen P95.
In figuur 6 vergelijken we de scores van Finland en Nieuw Zeeland.

figuur 6



Het blijkt dat de P95 van Nieuw Zeeland iets hoger ligt dan de P95 van Finland.
De gemiddelde score van Nieuw Zeeland is 529, met een standaardafwijking van 108.
Voor Finland geldt: $\mu = 546$ en $\sigma = 89$.

6p **14** ☐ Bereken hoeveel procent van de scores uit Nieuw Zeeland boven de P95 van Finland ligt.

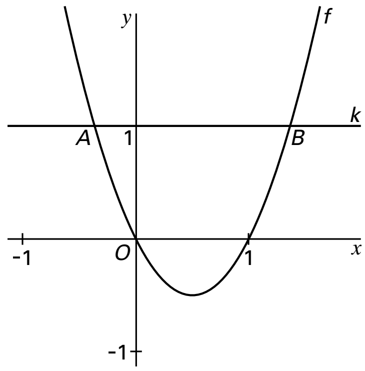
Een familie van functies

In figuur 7 is de grafiek getekend van de functie f gegeven door:

$$f(x) = 2x^2 - 2x$$

De lijn k met vergelijking $y = 1$ snijdt deze grafiek in de punten A en B.

figuur 7



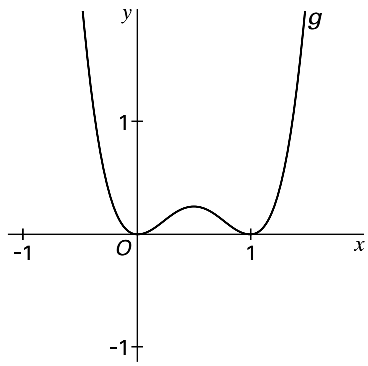
4p **15** ☐ Bereken de lengte van het lijnstuk AB. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

In figuur 8 is de grafiek getekend van de functie g gegeven door:

$$g(x) = (2x^2 - 2x)^2$$

Dit voorschrift kan ook geschreven worden als: $g(x) = 4x^4 - 8x^3 + 4x^2$.

figuur 8



3p **16** ☐ Toon dit algebraïsch aan.

De raaklijn aan de grafiek van g in het punt $(-1, 16)$ snijdt de x-as in een punt S.

5p **17** ☐ Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van de x-coördinaat van S.

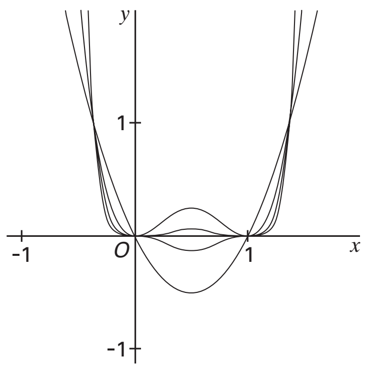
Een familie van functies is gegeven door:

$$y = (2x^2 - 2x)^n$$

voor elk positief geheel getal n.

Bij $n = 1$ hoort de functie f van figuur 7 en bij $n = 2$ de functie g van figuur 8.
In figuur 9 is in één assenstelsel voor een aantal waarden van n de grafiek van $y = (2x^2 - 2x)^n$ getekend.

figuur 9



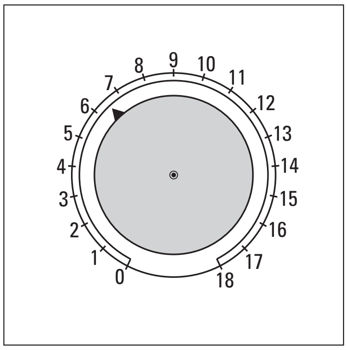
Voor elke waarde van n heeft de grafiek van $y = (2x^2 - 2x)^n$ een top voor $x = \frac{1}{2}$.

5p **18** ☐ Onderzoek voor welke waarden van n de afstand van deze top tot de x-as kleiner is dan 0,001.

Volumeknop

De volumeknop op een versterker kan gedraaid worden vanuit stand 0 naar stand 18. Zie figuur 10.
In stand 0 geeft de versterker geen geluid.
In stand 18 geeft de versterker het maximale geluidsniveau.

figuur 10

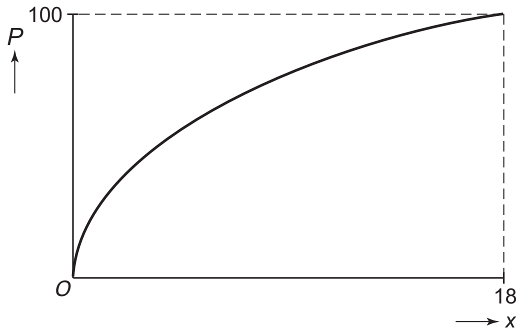


Er geldt de volgende formule:

$$P = a \cdot \log(x + 1)$$

Hierin is x de stand van de volumeknop, P het percentage van het maximale geluidsniveau en a een constante.
In figuur 11 is de grafiek getekend die het verband tussen x en P weergeeft.

figuur 11



Uit de gegevens is af te leiden dat $a \approx 78$.

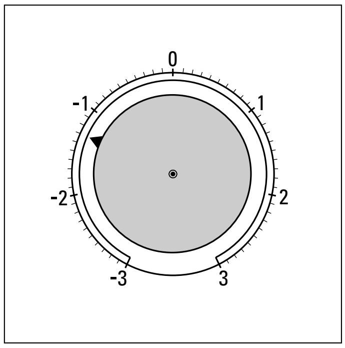
4p **19** ☐ Bereken a in drie decimalen nauwkeurig.

In de volgende vragen gaan we uit van $a = 78$.

4p **20** ☐ Bereken bij welke stand van de volumeknop het geluidsniveau gelijk is aan 75% van het maximale geluidsniveau. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Bij deze versterker wordt de wijzerplaat van de volumeknop vervangen door de wijzerplaat van figuur 12.
In stand –3 geeft de versterker geen geluid.
In stand 3 geeft de versterker het maximale geluidsniveau.
k is de stand van de volumeknop bij deze wijzerplaat.

figuur 12



In figuur 12 is k gelijk aan –1,3.

3p **21** ☐ Onderzoek hoe groot de waarde van P is bij deze stand van de volumeknop.

Voor het verband tussen de stand k van de volumeknop en het percentage P van het maximale geluidsniveau geldt ook bij deze wijzerplaat een formule.

4p **22** ☐ Stel deze formule op.