Bingo

Bingo is een populair spelletje: het wordt vaak gespeeld op campings, in sportkantines en in verzorgingstehuizen.
Bij bingo hebben alle spelers een bingokaart. Deze kaarten zijn er in vele soorten; in deze opgave gebruiken we de kaartsoort die in figuur 1 staat.

figuur 1

B	I	N	G	O
1	24	37	48	61
9	17	42	53	68
6	28	☼	60	75
13	25	36	59	74
7	18	31	56	70

In elke kolom staat een aantal getallen in een willekeurige volgorde, waarbij geen enkel getal meer dan één keer voorkomt. Verder geldt het volgende:
– onder de **B** staan 5 getallen uit 1 t/m 15;
– onder de **I** staan 5 getallen uit 16 t/m 30;
– onder de **N** staan 4 getallen uit 31 t/m 45 (en een leeg vakje in het midden);
– onder de **G** staan 5 getallen uit 46 t/m 60;
– onder de **O** staan 5 getallen uit 61 t/m 75.

In figuur 1 staat onder de **B** de kolom 1-9-6-13-7. Andere kolommogelijkheden zijn bijvoorbeeld: 4-1-12-7-3 of 13-7-6-1-9. Een andere volgorde van de getallen betekent dus een andere kolommogelijkheid.

3p **19** Bereken hoeveel verschillende kolommen onder de **B** mogelijk zijn.

Bij bingo wordt er door een spelleider steeds een willekeurig balletje getrokken uit een bak die bij aanvang van het spel 75 balletjes bevat, genummerd van 1 tot en met 75. De spelleider leest steeds het getal op het getrokken balletje hardop voor en legt het balletje weg.
Als het voorgelezen getal op zijn bingokaart voorkomt, zet de speler een kruis door dat getal. Iemand heeft bingo als alle getallen op zijn bingokaart zijn doorgekruist.

Wiskundigen hebben voor een willekeurige bingokaart bij dit bingospel een aantal kansformules opgesteld, waaronder:

$$\text{P(bingo bij de } n^{\text{e}} \text{ trekking)} = \frac{24}{76-n} \cdot \frac{\binom{51}{n-24}}{\binom{75}{n-1}}$$

Voor veel kansvraagstukken wordt ook de volgende formule gebruikt:

$$\text{P(bingo in maximaal } n \text{ trekkingen)} = \frac{\binom{n}{24}}{\binom{75}{24}}$$

Hierbij stelt bijvoorbeeld $\binom{75}{24}$ voor: het aantal combinaties van 24 uit 75.

Dat is ongeveer gelijk aan $2{,}578 \cdot 10^{19}$.

Frédérique weet dat er vaak heel veel trekkingen nodig zijn voordat haar kaart vol is.

De kans dat zij pas bij de laatste trekking bingo heeft, is zelfs behoorlijk groot.

4p **20** Bereken deze kans.

Het gebeurt heel vaak dat Frédérique na 65 trekkingen nog steeds geen bingo heeft. De kans daarop is ruim 98%.

4p **21** Toon dit aan.

Onlangs had Frédérique een excursieweek. Tijdens de heenreis speelde men in de bus enkele malen bingo. Ook toen viel het haar op: zelfs met 40 spelers die elk één kaart hebben, zijn er erg veel trekkingen nodig voordat er een keer bingo valt.
Natuurlijk wist Frédérique (zie de vorige vraag) dat de kans op nog steeds geen bingo na 65 trekkingen bij één speler 0,98 is. Ze had echter verwacht dat er met 40 spelers toch in heel veel gevallen wel bij 65 trekkingen of eerder bingo zou vallen.

4p **22** Bereken de kans dat twee of meer van deze 40 spelers na 65 trekkingen bingo hebben.