FORMULEBLAD

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \dfrac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$,
waarin a, b, c en d absolute aantallen zijn

- als $phi < -0{,}4$ of $phi > 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $-0{,}4 \leq phi < -0{,}2$ of $0{,}2 < phi \leq 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $-0{,}2 \leq phi \leq 0{,}2$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{\text{cp}}$)
(met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{\text{cp}} > 40$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $20 < \max V_{\text{cp}} \leq 40$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $\max V_{\text{cp}} \leq 20$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Effectgrootte $E = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\overline{X}_1$ en $\overline{X}_2$ de steekproefgemiddelden ($\overline{X}_1 \geq \overline{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0{,}8$, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als $0{,}4 < E \leq 0{,}8$, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- als $E \leq 0{,}4$, dan zeggen we “het verschil is gering”.

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen[1)] elkaar niet overlappen, dan zeggen we “het verschil is groot”,
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we “het verschil is middelmatig”,
- in alle andere gevallen zeggen we “het verschil is gering”.

noot 1 De ‘box’ is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is

$\overline{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\overline{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Wereldbevolking

Veel wetenschappers waren het er tot voor kort over eens dat de groei van de wereldbevolking na 2050 tot stilstand zou komen. Het aantal mensen zou dan in 2050 ongeveer 9 miljard zijn.
Uit nieuwe wetenschappelijke voorspellingen blijkt echter dat er in 2100 mogelijk al 12 miljard mensen op aarde zullen leven.

De wereldbevolking bestond in 1990 uit 5,3 miljard mensen en in 2011 uit 7 miljard mensen. Neem aan dat de wereldbevolking in deze periode exponentieel groeide.

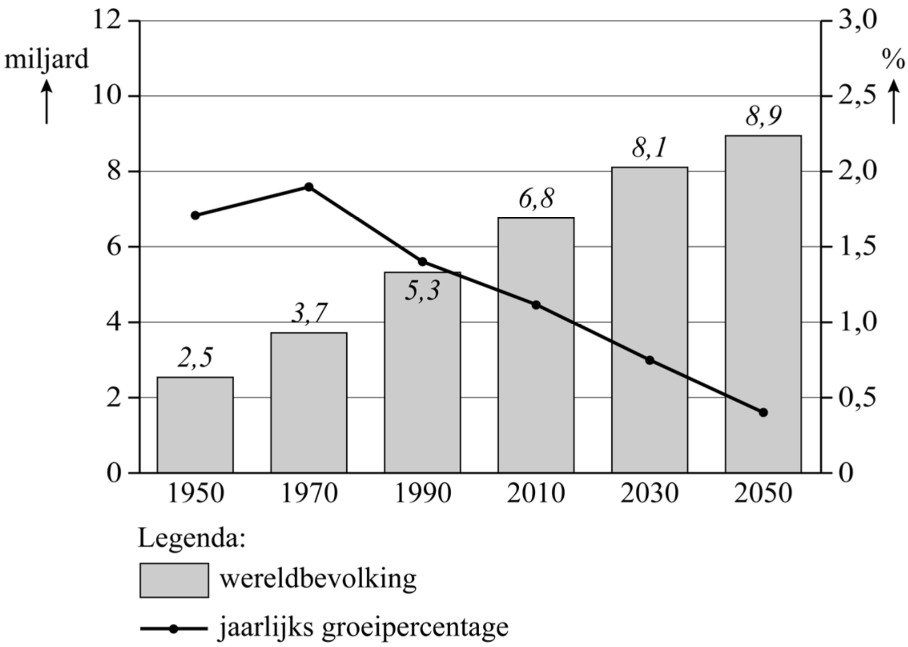
4p **1** Bereken het hierbij behorende jaarlijkse groeipercentage. Geef je antwoord in één decimaal.

In 2011 bestond de wereldbevolking uit 7 miljard mensen. In 2012 waren er 80 miljoen mensen bijgekomen. Er zijn verschillende scenario's denkbaar voor de groei van de wereldbevolking na 2012.
In een eerste scenario wordt aangenomen dat de groei vanaf 2011 lineair zal zijn.

4p **2** Bereken in welk jaar de wereldbevolking volgens dit eerste scenario tot 9 miljard mensen zal zijn toegenomen.

Een tweede scenario gaat uit van groei, waarin het jaarlijkse groeipercentage tot 2050 langzaam afneemt. In dit scenario wordt een wereldbevolking van 8,9 miljard mensen in 2050 voorspeld. Zie de figuur.

figuur



Verder neemt men in dit scenario aan dat het jaarlijkse groeipercentage dat in de figuur is af te lezen voor het jaar 2050, in de jaren na 2050 blijft gelden.

4p **3** Bereken of daarmee in het jaar 2100 een wereldbevolking van 12 miljard mensen gehaald wordt.

Vrijwel alle scenario's voorspellen een groei van de wereldbevolking. Hierdoor zal de voedselproductie omhoog moeten. Niet alleen omdat er meer mensen zullen zijn, maar ook omdat naar verwachting in snel groeiende economieën de gemiddelde voedselconsumptie per persoon zal toenemen. In de tabel zie je de gegevens van de totale wereldbevolking uit 2006 en een voorspelling voor 2050.

tabel

	wereldbevolking	**totale voedselconsumptie per dag**
2006	6569 miljoen	18 000 miljard kilocalorieën
2050	9111 miljoen	28 000 miljard kilocalorieën

3p **4** Bereken met bovenstaande gegevens met hoeveel kilocalorieën de gemiddelde voedselconsumptie per persoon per dag naar verwachting zal toenemen in de periode van 2006 tot 2050. Geef je antwoord in een geheel aantal kilocalorieën.

Hoe koud voelt het aan?

In de winter kan het, vooral als het hard waait, veel kouder aanvoelen dan het in werkelijkheid is. We zeggen dan dat de **gevoelstemperatuur** lager is dan de werkelijke temperatuur.
Tot aan het einde van de vorige eeuw gebruikte het KNMI (Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut) de tabel van Steadman om de gevoelstemperatuur te bepalen. Zie de tabel.

tabel gevoelstemperatuur volgens Steadman afgerond op helen, in °C

windsnelheid		werkelijke temperatuur					
in km/u	in m/s (afgerond)	0 °C	–5 °C	–10 °C	–15 °C	–20 °C	–25 °C
10	**2,8**	–2	–7	–12	–17	–22	–28
15	**4,2**	–3	–9	–14	–19	–24	–30
20	**5,6**	–5	–10	–15	–21	–26	–32
25	**6,9**	–6	–12	–17	–23	–28	–34
30	**8,3**	–7	–13	–19	–24	–30	–36
35	**9,7**	–9	–15	–20	–26	–32	–38
40	**11,1**	–10	–16	–22	–28	–34	–40
45	**12,5**	–11	–17	–23	–29	–35	–41
50	**13,9**	–12	–19	–25	–31	–37	–43
55	**15,3**	–13	–20	–26	–32	–39	–45
60	**16,7**	–15	–21	–27	–34	–40	–47
65	**18,1**	–16	–22	–29	–35	–42	–48
70	**19,4**	–16	–23	–30	–37	–43	–50
75	**20,8**	–17	–24	–31	–38	–45	–52
80	**22,2**	–18	–25	–32	–39	–46	–53

In deze tabel kan de (afgeronde) gevoelstemperatuur worden afgelezen bij een gegeven windsnelheid en werkelijke temperatuur. Zo zie je bijvoorbeeld dat bij een windsnelheid van 30 km/u en een werkelijke temperatuur van –10 °C de gevoelstemperatuur –19 °C is.

Op 16 februari 1956 werd in het Groningse Uithuizermeeden een kouderecord gemeten. Het werd toen –26,8 °C bij een windsnelheid van 25 km/u. Met behulp van de tabel van Steadman kun je berekenen wat de bijbehorende gevoelstemperatuur was. Ga ervan uit dat voor elke windsnelheid het verband tussen de gevoelstemperatuur en de werkelijke temperatuur lineair is

4p **5** Bereken deze gevoelstemperatuur. Gebruik hierbij de gevoelstemperaturen die horen bij een werkelijke temperatuur van 0 °C en –25 °C. Geef je antwoord in gehele graden.

Sinds het begin van deze eeuw wordt bij het KNMI de gevoelstemperatuur berekend met een formule die in Canada ontwikkeld is. Deze formule luidt:

$$G = 13{,}12 + 0{,}62 \cdot T - 13{,}96 \cdot w^{0{,}16} + 0{,}49 \cdot T \cdot w^{0{,}16}$$ (Canadese formule)

In deze formule is T de werkelijke temperatuur in °C, w de windsnelheid in m/s en G de gevoelstemperatuur in °C.

De tabel van Steadman geeft iets andere gevoelstemperaturen dan de Canadese formule. Vooral bij een hoge windsnelheid en een lage werkelijke temperatuur is er een behoorlijk groot verschil tussen de gevoelstemperatuur volgens de tabel en die volgens de formule.

4p **6** Bereken hoeveel graden dit verschil is bij een werkelijke temperatuur van –20 °C en een windsnelheid van 80 km/u. Geef je antwoord in gehelen.

Op het eiland Schiermonnikoog waait het in de wintermaanden behoorlijk. De windsnelheid is in deze maanden gemiddeld 6,5 m/s. Je kunt bij deze windsnelheid de Canadese formule herleiden tot de vorm $G = a \cdot T + b$ waarbij a en b getallen zijn.

3p **7** Voer deze herleiding uit en geef a en b in twee decimalen.

Kajak

Kanovaren is een Olympische sport. Een van de onderdelen is de vlakwatersprint kajakvaren. Een kajak is een soort kano. Zie de foto.

foto

Tijdens de Olympische Spelen in Peking in 2008 was de winnende tijd met een eenpersoonskajak op de 500 meter vlakwatersprint voor mannen 1 minuut en 37,252 seconden.

3p **8** Bereken de gemiddelde snelheid van de winnende kajak op deze afstand in km/u. Geef je antwoord in één decimaal.

Er zijn ook races voor kajaks met 2 of 4 personen. In de tabel staan nog enkele winnende tijden (in seconden) die op de Olympische Spelen van 2008 in Peking met kajaks zijn behaald. Het aantal personen in de boot wordt aangeduid met N.

tabel

	$N=1$	$N=2$	$N=4$
mannen 1000 m	206,323 s	191,809 s	175,714 s
vrouwen 500 m	110,673 s	101,308 s	92,231 s

Monique vraagt zich af of er een lineair verband bestaat tussen de winnende tijd van de vrouwen op de 500 m en het aantal personen in de kajak.

4p **9** Onderzoek met gegevens uit de tabel of dat verband lineair kan zijn.

Meer personen leveren een grotere gezamenlijke kracht, maar maken de kajak ook zwaarder. Toch wordt er door meer personen sneller gevaren. Natuurkundig is te beredeneren dat er bij benadering het volgende verband bestaat:

$$V = c \cdot N^{\frac{1}{9}}$$

Hierin is V de gemiddelde snelheid in m/s, c een constant getal dat afhangt van het type kajak en de omstandigheden waarin gevaren wordt en N het aantal personen in de boot.
Ook is bekend dat:

$$V = \frac{afstand}{tijd} \quad \text{(met } afstand \text{ in m en } tijd \text{ in s)}$$

We gaan ervan uit dat V tijdens een wedstrijd constant is. Je kunt dan met de drie winnende tijden in de tabel nagaan dat dit verband tussen V en N bij benadering klopt.

4p **10** Ga dit voor de mannen op de 1000 meter met berekeningen na.

In de rest van deze opgave gaan we uit van een bepaald type kajak en bepaalde omstandigheden zodat geldt $c = 4,4$, dus:

$$V = 4,4 \cdot N^{\frac{1}{9}}$$

Deze formule is te herleiden tot een formule van de vorm $N = a \cdot V^b$.

4p **11** Geef deze herleiding.

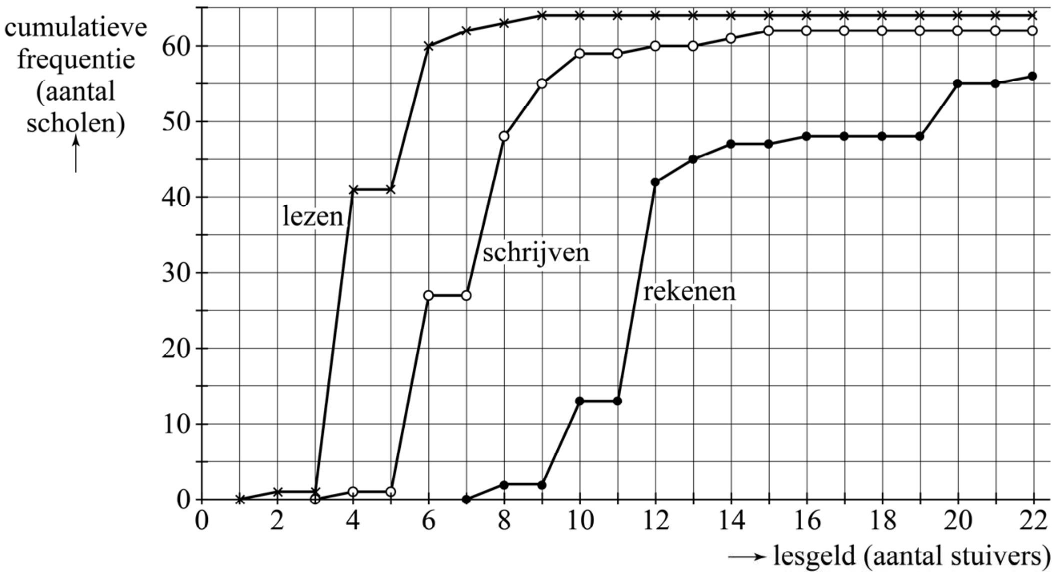
Wanneer één persoon vaart met dit type kajak, geeft dat een bepaalde gemiddelde snelheid. Er zouden heel wat personen in ditzelfde type kajak nodig zijn om die gemiddelde snelheid met minstens 25% te verhogen.

5p **12** Bereken hoeveel personen daarvoor minimaal nodig zijn.

Onderwijs in vroeger tijden

Hoe zag het basisonderwijs er vroeger uit? Dat heeft de heer Uil onderzocht. In zijn proefschrift bespreekt hij het onderwijs in Zeeland en Staats-Vlaanderen[1)] in de periode 1578 – 1801.
In die tijd gingen veel kinderen naar de Nederduitse school. Daar leerden ze eerst lezen. Pas wanneer een kind kon lezen, mocht het gaan leren schrijven. Als het kind ook dat kon, mocht het gaan leren rekenen. Voor elk vak apart moest lesgeld worden betaald door de ouders: één of meerdere stuivers. Het lesgeld was niet op alle scholen even hoog. Op geen enkele school bedroeg het lesgeld voor een vak meer dan 22 stuivers per maand.
In de figuur zie je van 64 scholen in Zeeland en Staats-Vlaanderen de cumulatieve frequentiepolygonen van het lesgeld dat per maand betaald moest worden voor de drie vakken. Zo lees je bijvoorbeeld af dat op 60 scholen het lesgeld per maand voor lezen 6 stuivers of minder bedroeg. De figuur staat vergroot afgebeeld op de uitwerkbijlage.

figuur lesgeld per maand per vak



2p **13** Bepaal voor welk vak het lesgeld per maand op deze scholen over het algemeen het laagst was. Licht je antwoord toe.

Er waren scholen bij waar niet alle drie de vakken werden gegeven.
2p **14** Leg uit hoe je dit in de figuur kan zien.

noot 1 Zeeland en Staats-Vlaanderen waren delen van Nederland toen het nog een republiek was.

Het lesgeld per vak bedroeg op elke school een geheel aantal stuivers per maand. Niet alle mogelijke aantallen stuivers kwamen voor.

3p **15** Geef alle verschillende aantallen stuivers die voor het vak schrijven als lesgeld per maand betaald werden.

Helaas gingen niet alle kinderen naar school. In het jaar 1796 bleken in de stad Veere 221 van de 323 kinderen naar school te gaan. Als deze gegevens representatief zijn voor alle steden in Zeeland en Staats-Vlaanderen, dan kan hiermee het 95%-betrouwbaarheidsinterval bepaald worden van het percentage kinderen dat in 1796 in de steden van Zeeland en Staats-Vlaanderen naar school ging.

4p **16** Bereken met behulp van het formuleblad dit 95%-betrouwbaarheidsinterval. Geef de getallen in je antwoord in één decimaal.

De heer Uil heeft ook een schatting gemaakt van het aantal volwassenen dat kon schrijven. Daartoe heeft hij verzoekschriften bekeken die in die tijd bij de Zeeuwse en Staats-Vlaamse overheden ingediend zijn. De indieners ervan ondertekenden die met een handtekening of met een merk, bijvoorbeeld een kruisje of een zelfbedacht teken. Wie een handtekening zette kon waarschijnlijk schrijven. Wie een merk zette, kon waarschijnlijk niet schrijven. In de tabel is te zien hoeveel handtekeningen en hoeveel merken er gezet zijn.

tabel

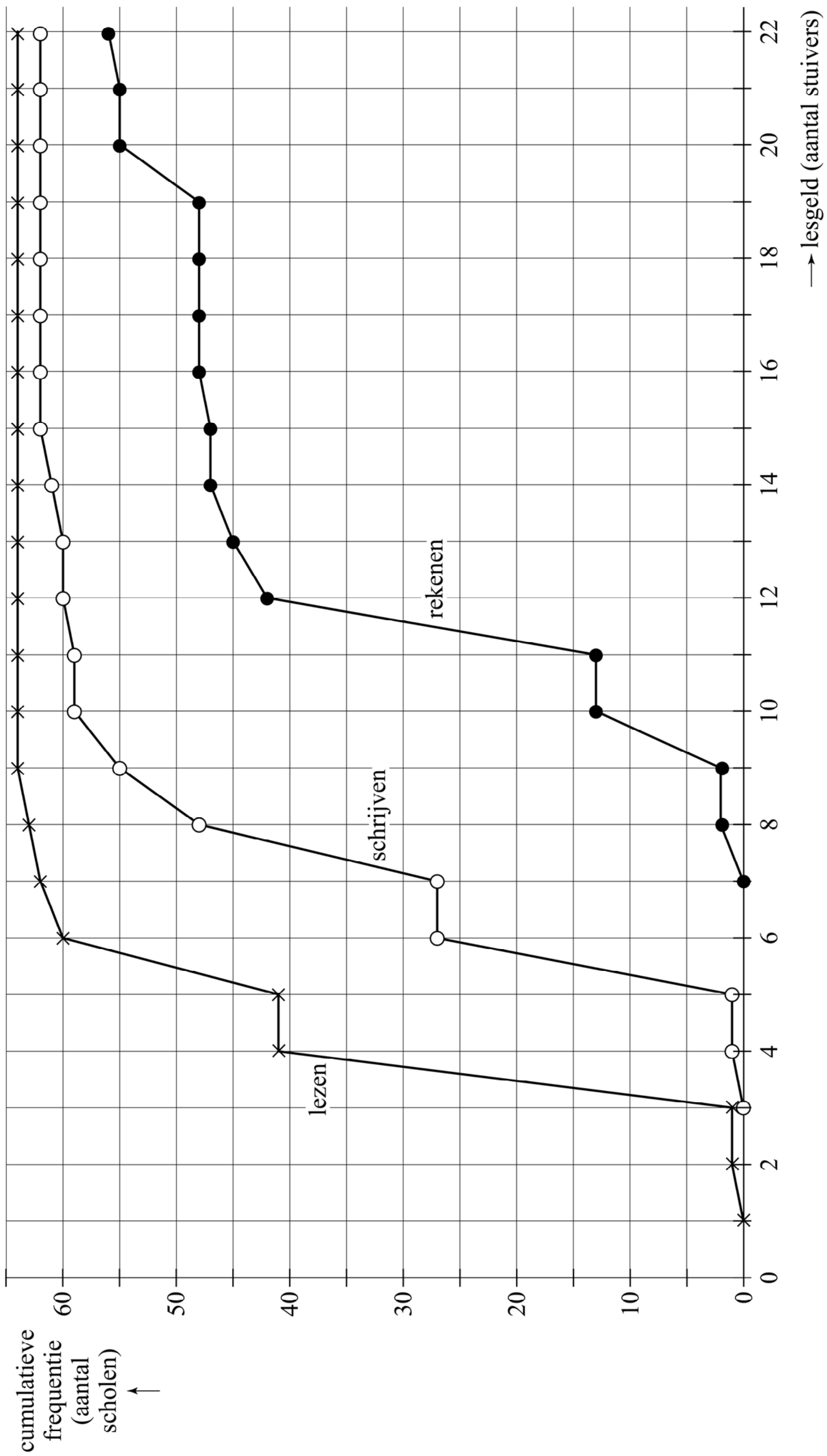
	mannen		**vrouwen**		
periode	**handtekening**	**merk**	**handtekening**	**merk**	**totaal**
1609 – 1650	265	102	-	-	367
1651 – 1700	556	85	4	2	647
1701 – 1750	530	80	103	83	796
1751 – 1800	1735	181	255	68	2239

Je kunt uit de gegevens afleiden dat er verschil is tussen mannen en vrouwen wat betreft het gebruik van een handtekening of een merk.

4p **17** Bepaal met behulp van het formuleblad of dit verschil in de periode 1701 – 1750 gering, middelmatig of groot is.

uitwerkbijlage

lesgeld per maand per vak



Waterdiepte meten

Waterdiepte werd vroeger vanaf een schip gemeten met behulp van een lang touw met een stuk lood aan het uiteinde. Het lood werd aan het touw het water ingelaten. Lood is zwaar, dus het zinkt. Wanneer het lood de bodem raakte, werd het touw uit het water gehaald. Daarna werd het deel gemeten dat onder water was geweest. Dit deed de schipper door telkens een deel van het touw tussen uitgestrekte handen te pakken. Zie figuur 1. Het aantal keer dat dat kon, was de diepte in **vadem**. Deze oude lengtemaat geeft dus de spanwijdte aan van de armen van een volwassen man. Omdat het een onnauwkeurige manier van meten is, is deze lengte later precies vastgelegd: 1 vadem is gelijk aan 6 voet. Een voet is even lang als 12 inch en een inch is 25,4 mm.

figuur 1

Noemen we de waterdiepte in meter M en de waterdiepte in vadem V, dan kunnen we V omrekenen naar M.

3p **18** Geef een formule waarbij M uitgedrukt is in V.

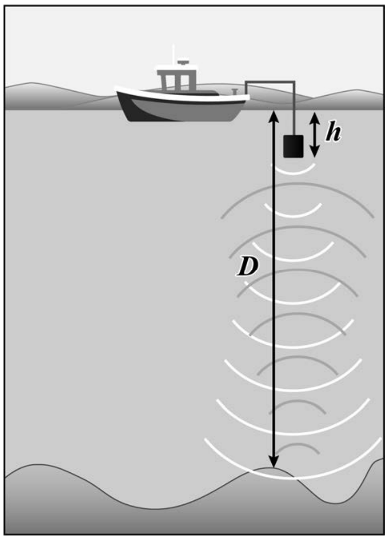
Tegenwoordig meet men waterdiepte met een **echolood**. Dit apparaat bestaat uit een zender en een ontvanger die onder het wateroppervlak bevestigd zijn aan een boot. Het echolood zendt een geluidsgolf naar de bodem en even later wordt de door de bodem teruggekaatste geluidsgolf, de echo, weer door het echolood ontvangen.
Er geldt:

$$D = h + 750t$$

Hierin is:
- D de waterdiepte in meter, dus de afstand tussen het wateroppervlak en de bodem;
- t de echotijd tussen het zenden van de geluidsgolf en het ontvangen van de echo in seconden;
- h de afstand tussen de onderkant van het echolood en het wateroppervlak in meter.

Zie figuur 2.

figuur 2



3p **19** Bereken de echotijd als de bodem zich op 10 meter onder het echolood bevindt. Geef je antwoord in seconden en in drie decimalen.

De snelheid waarmee geluid zich verplaatst in water kun je uit de formule afleiden.
Yvonne zegt: “Die snelheid is de helft van 750, dus 375 meter per seconde.”
Josje zegt: “Die snelheid is het dubbele van 750, dus 1500 meter per seconde.”
Eén van beiden heeft gelijk.

3p **20** Wie heeft gelijk? Leg je antwoord uit met behulp van de formule.

Een groep duikers vaart de zee op en zoekt een zo diep mogelijke plek om veilig voor anker te gaan. De ankerketting is 78 m lang en voor de veiligheid moet deze lengte minstens anderhalf keer de waterdiepte zijn. De waterdiepte die het echolood op deze boot aangeeft, kan door een onnauwkeurige meting 3% afwijken van de werkelijke waterdiepte.

3p **21** Bereken de maximale waarde die het echolood als waterdiepte mag aangeven om veilig voor anker te kunnen gaan. Geef je antwoord in meter en in één decimaal.

Glas

Voor ramen in woningen kunnen verschillende soorten glas gebruikt worden. Zo bestaan er ramen van enkel glas, van dubbelglas en van hoogrendementsglas. Enkel glas isoleert het minst goed. Dat wil zeggen: de warmte blijft minder goed binnenshuis. Dubbelglas isoleert beter. Hoogrendementsglas isoleert het best.

Om verschillende glassoorten te vergelijken gebruikt men de **warmtedoorgangscoëfficiënt** U. Er geldt: hoe lager U, des te beter is de isolatie. Om te berekenen hoeveel warmte er door het glas verloren gaat, kan de volgende formule worden gebruikt:

$$W = U \cdot G \cdot \Delta T$$

Hierin is W het warmteverlies in watt, G de glasoppervlakte in m^2 en ΔT het verschil tussen de binnentemperatuur en de buitentemperatuur in °C.

Er wordt tegenwoordig ook isolatiefolie verkocht. Dit doorzichtige folie wordt op het glas geplakt. De warmtedoorgangscoëfficiënt U van het glas wordt daardoor lager. Zie de tabel.

tabel

soort beglazing	**U zonder folie**	**U met folie**
enkel glas	5,8	2,5
dubbelglas	2,9	1,6
hoogrendementsglas	1,1	0,97

Peter is eigenaar van een woning met 10,65 m^2 enkel glas en 24,85 m^2 dubbelglas. Hij wil het warmteverlies verminderen.
Peter zou al het bestaande glas met folie kunnen beplakken. Hij vindt folie niet mooi en besluit daarom het warmteverlies in zijn woning te verminderen door een gedeelte van het glas in zijn woning te vervangen door hoogrendementsglas. Om te bepalen hoeveel enkel glas en hoeveel dubbelglas hij zal vervangen, kiest hij de volgende uitgangspunten:

- De gemiddelde binnentemperatuur is 19 °C en de gemiddelde buitentemperatuur is 9 °C.
- Het warmteverlies moet evenveel verminderd worden als wanneer al het bestaande glas met folie beplakt zou worden.
- Hij wil zo weinig mogelijk glasoppervlak vervangen.
- Hij laat alle kosten buiten beschouwing.

8p **22** Bereken hoeveel enkel glas en hoeveel dubbelglas Peter moet vervangen door hoogrendementsglas. Geef je antwoord in m^2 en in twee decimalen.