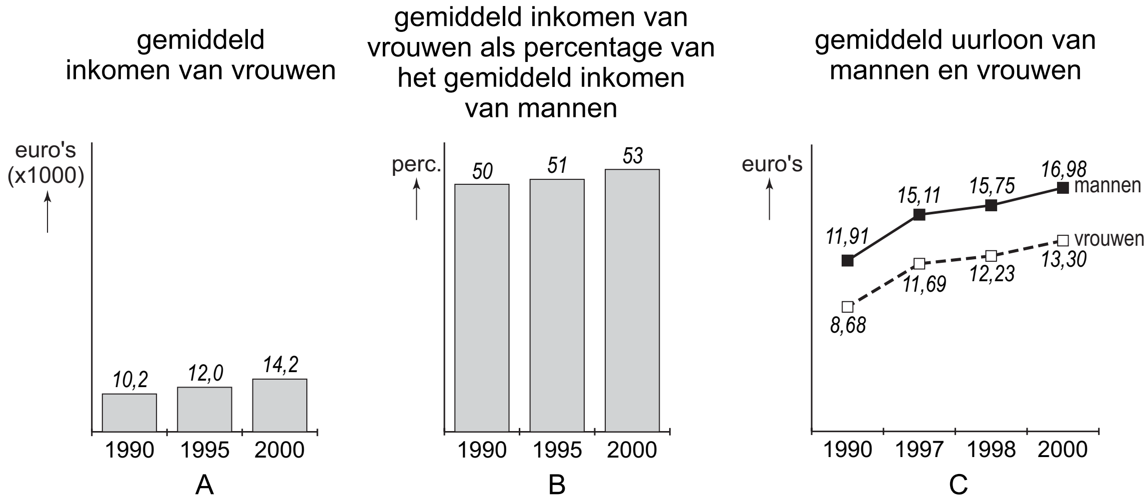
Verdienen vrouwen minder?

In maart 2003 stond in de Volkskrant een artikel over de inkomensachterstand van vrouwen op mannen. Deze figuur stond er bij:

figuur 1



Figuur 1A gaat over het gemiddelde jaarinkomen van vrouwen.

3p **1** ☐ Toon met een berekening aan dat het gemiddelde jaarinkomen van vrouwen tussen 1990 en 2000 met ruim 39% is toegenomen.

Met behulp van de figuren 1A en 1B kun je het gemiddelde jaarinkomen van de mannen berekenen. Je weet namelijk het gemiddelde jaarinkomen van de vrouwen en hoeveel procent dat is van het gemiddelde jaarinkomen van de mannen.

4p **2** ☐ Toon met berekeningen aan dat het gemiddelde jaarinkomen van de mannen tussen 1990 en 2000 met een kleiner percentage is toegenomen dan dat van de vrouwen.

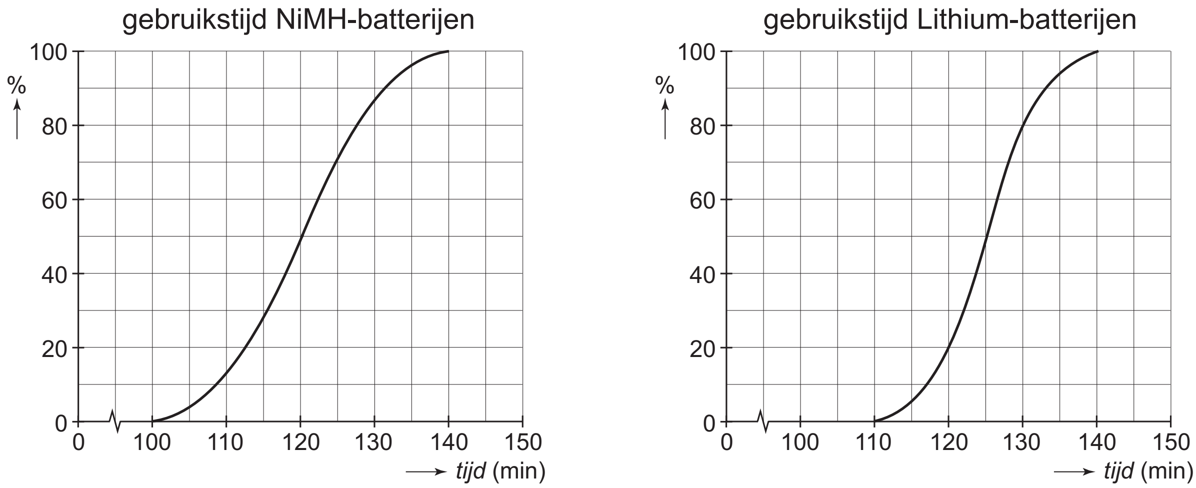
Met de gegevens van 1990 en 2000 in figuur 1C is het mogelijk twee berekeningen uit te voeren die tot verschillende conclusies leiden over het gemiddeld uurloon van vrouwen vergeleken met dat van mannen. De ene berekening leidt tot de conclusie dat vrouwen in die 10 jaar *niet* zijn ingelopen op mannen. De andere berekening leidt tot de conclusie dat vrouwen *wel* zijn ingelopen op mannen.

4p **3** ☐ Laat met berekeningen zien hoe deze twee verschillende conclusies getrokken kunnen worden.

Batterijen

Digitale fotocamera’s werken op batterijen. Met standaard alkaline-batterijen kun je de camera slechts 15 minuten aan laten staan: de *gebruikstijd* is 15 minuten. Daarom gebruikt men voor deze camera’s batterijen met een grotere gebruikstijd, meestal Lithium-batterijen of NiMH-batterijen (NiMH staat voor Nikkel Metaal Hydride).
Robbert fotografeert veel en is daarom geïnteresseerd in batterijen.
Een tijdschrift over fotografie heeft NiMH-batterijen en Lithium-batterijen onderzocht. Als resultaat vonden de onderzoekers dat de gebruikstijd van beide soorten bij benadering normaal verdeeld is. Zij publiceerden over deze batterijen cumulatieve frequentiepolygonen. Zie figuur 2.

figuur 2



4p **4** □ Welke van deze twee soorten heeft de grootste gemiddelde gebruikstijd? Licht je antwoord toe.

We zeggen dat een type batterij betrouwbaarder is dan een ander type wanneer de standaardafwijking van de gebruikstijd kleiner is dan die van dat andere type.

3p **5** □ Welke van de twee typen uit figuur 2 is betrouwbaarder? Licht je antwoord toe.

Robbert gaat regelmatig naar popconcerten en wil dan elk moment digitaal kunnen vastleggen: zijn camera moet steeds aan staan. Hij heeft daarvoor een nieuw type batterij gekocht. De gebruikstijd van zo'n batterij is normaal verdeeld met een gemiddelde van 155 minuten en een standaardafwijking van 15 minuten.

Robbert bezoekt een popconcert dat drie uur duurt.

3p **6** □ Bereken de kans dat de gebruikstijd van de batterij voldoende is voor het hele popconcert.

Een fabrikant van batterijen maakt reclame met de volgende beweringen:

> 99% *van mijn batterijen heeft een gebruikstijd van meer dan* 2 *uur.*
> *De helft van mijn batterijen heeft een gebruikstijd van zelfs meer dan* $2\frac{1}{2}$ *uur.*

De fabrikant gaat kennelijk uit van een gemiddelde gebruikstijd van $2\frac{1}{2}$ uur. Ook van deze batterijen is de gebruikstijd bij benadering normaal verdeeld.

4p **7** □ Bereken de standaardafwijking van de gebruikstijd van deze batterijen. Geef je antwoord in hele minuten.

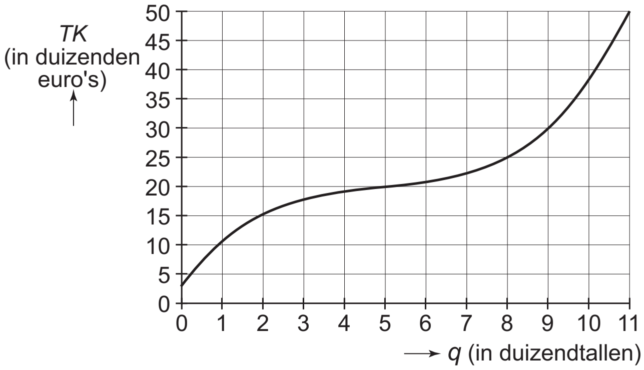
NiMH-batterijen lopen langzaam leeg, ook als ze niet worden gebruikt. Het leeglopen gebeurt exponentieel: elke dag verliest een batterij 4% van zijn energie als hij niet wordt gebruikt.

5p **8** □ Bereken na hoeveel dagen een volledig opgeladen batterij nog 70% van zijn energie over heeft. Rond je antwoord af op één decimaal.

Verpakkingen

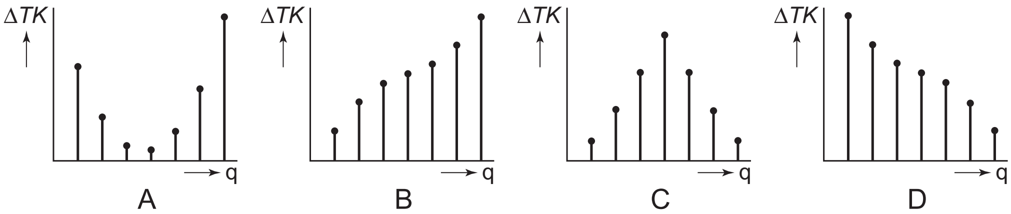
Een bedrijf maakt bijzondere verpakkingen. Het bedrijf heeft onderzocht hoe de kosten voor het maken van die verpakkingen samenhangen met het aantal verpakkingen.
Het verband tussen de totale kosten TK (in duizenden euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q (in duizendtallen) zie je in figuur 3.
In figuur 3 lees je bijvoorbeeld af dat bij een productie van 2000 verpakkingen de totale kosten 15 000 euro zijn.

figuur 3



In figuur 4 zie je vier diagrammen A, B, C en D, waarin de toename ΔTK van TK is weergegeven. Eén van de vier diagrammen past bij de grafiek in figuur 3.

figuur 4



3p **9** ☐ Welk toenamendiagram past bij de grafiek in figuur 3? Licht je antwoord toe.

De *marginale* kosten MK geven de veranderingen van de totale kosten weer.

Figuur 3 staat vergroot op de uitwerkbijlage. Met behulp van die figuur kun je een schatting geven van het aantal verpakkingen waarbij de marginale kosten zo klein mogelijk zijn.
3p **10** ☐ Geef een schatting van dat aantal verpakkingen. Licht je werkwijze toe.

Bij figuur 3 hoort de volgende formule:

$$TK = 0{,}12q^3 - 1{,}77q^2 + 9{,}2q + 3{,}25$$

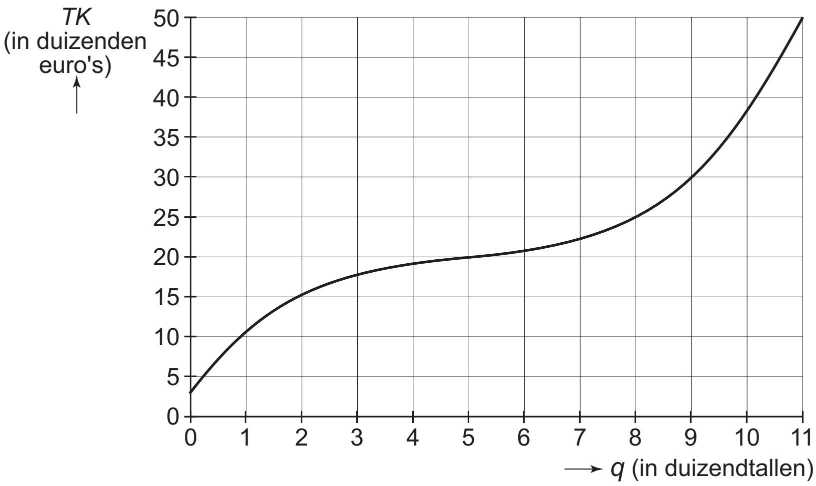
Hierin zijn TK en q nog steeds de totale kosten in duizenden euro's en het aantal geproduceerde verpakkingen in duizendtallen.

Je kunt met de formule precies berekenen bij welk aantal verpakkingen de marginale kosten zo klein mogelijk zijn. De afgeleide van TK geeft namelijk een goede benadering van de marginale kosten, dus gebruik je hier $MK = TK'$.

6p **11** ☐ Stel de formule op van de marginale kosten MK en bereken daarmee bij welk aantal verpakkingen MK minimaal is.

Uitwerkbijlage bij vraag 10

Vraag 10



Hypotheek aflossen

De meeste mensen die een huis kopen, lenen daarvoor geld bij een bank. Zo'n lening wordt een hypotheek genoemd.
Er zijn verschillende hypotheekvormen. In deze opgave gaat het over een *aflossingsvrije* hypotheek. Je leent bij een bank voor 30 jaar een bedrag. Over dat bedrag betaal je elk jaar hypotheekrente aan de bank, maar je betaalt niets terug van het geleende bedrag.
Na afloop van de 30 jaar betaal je het bedrag in één keer terug. Daar moet je dus voor sparen in die 30 jaar.

foto

Mevrouw Everts heeft lang geleden een huis van 250 000 euro gekocht. Ze heeft een aflossingsvrije hypotheek van 250 000 euro met een looptijd van 30 jaar tegen een rentepercentage van 5,4% per jaar.
Van de belastingdienst krijgt ze elk jaar een deel van de betaalde hypotheekrente terug. Hoeveel je terugkrijgt, hangt af van je inkomen. Mevrouw Everts krijgt 30% van de betaalde hypotheekrente terug.

3p **12** ☐ Bereken voor mevrouw Everts hoeveel euro de jaarlijkse hypotheekrente na belastingteruggave bedraagt.

Voordat zij het huis kocht, had ze 40 000 euro gespaard. Dit bedrag heeft ze in een (belastingvrij) beleggingsfonds gestort. Zij hoopt dat dit bedrag na 30 jaar tot 250 000 euro is gegroeid, zodat ze in één keer het geleende bedrag kan aflossen.

5p **13** ☐ Bereken het percentage waarmee de 40 000 euro dan per jaar moet toenemen, uitgaande van exponentiële groei.

Stel dat mevrouw Everts 10 000 euro zal erven op 1 januari 2007.
Haar hypotheek loopt op 1 januari 2015 af: dan moet ze dus nog 8 jaar hypotheekrente betalen en daarna de schuld aflossen. Zij twijfelt tussen de volgende twee mogelijkheden:

- *Sparen*:
  Ze zet de 10 000 euro op een spaarrekening met een jaarrente van 3,2%. Na 8 jaar staat er 12 865,82 euro op deze spaarrekening.
  Haar schuld bij de bank blijft 250 000 euro.

- *Aflossen*:
  Ze verlaagt de schuld bij de bank tot 240 000 euro.
  Omdat de schuld nu 10 000 euro minder is, betaalt ze jaarlijks minder hypotheekrente. Dit hypotheekrentevoordeel stort ze ieder jaar op een spaarrekening.
  Het saldo op deze rekening wordt gegeven door de formule:

$$saldo = 11\,812{,}5 \cdot (1{,}032^t - 1)\text{, met } t \text{ in jaren vanaf 1 januari 2007}$$

3p **14** ☐ Geef mevrouw Everts een advies wat voor haar voordeliger is met de 10 000 euro: sparen of aflossen.

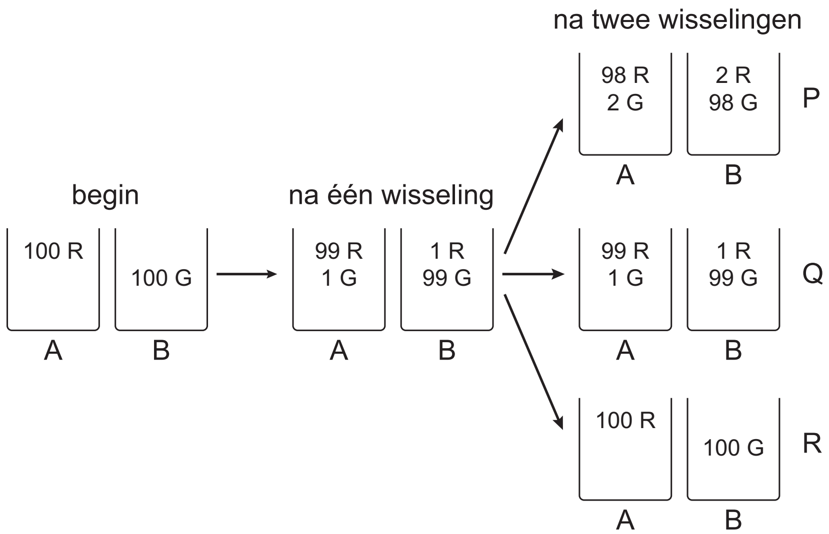
Daniël

In figuur 5 zie je Daniël achter twee vazen met ballen.
Hij begint met 100 rode ballen in vaas A en met 100 groene ballen in vaas B.
Uit beide vazen pakt hij tegelijk met zijn ogen dicht een bal en doet die in de andere vaas.
Zo blijven er in beide vazen dus wel 100 ballen, maar dus niet meer alleen rode ballen in vaas A.
Daniël kan dit proces, het tegelijk aselect uit de twee vazen een bal pakken en in de andere vaas doen, zo vaak herhalen als hij wil.
We noemen dit proces een *wisseling*, omdat twee ballen van vaas wisselen.

In figuur 6 zie je wat er kan gebeuren.

figuur 5

figuur 6



Links staat de beginsituatie: 100 rode ballen in vaas A en 100 groene ballen in vaas B.
Na één wisseling zit er uiteraard 1 groene bal in vaas A en 1 rode in vaas B. Met andere woorden, de kans op 99 rode ballen in vaas A na één wisseling is gelijk aan 1.
Bij de tweede wisseling kunnen er drie situaties ontstaan, in de figuur aangegeven met P, Q en R.

Situatie R is bijzonder: na de tweede wisseling is de beginsituatie terug.

4p **15** ☐ Beschrijf wat er bij de tweede wisseling moet zijn gebeurd en toon aan dat de kans hierop gelijk is aan 0,0001.

Situatie Q is ook bijzonder. Hoewel er een tweede wisseling heeft plaatsgevonden, is het aantal rode en groene ballen in de vazen hetzelfde als vóór die tweede wisseling.

5p **16** ☐ Beschrijf wat er hier bij de tweede wisseling is gebeurd en toon aan dat de kans hierop gelijk is aan 0,0198.

We zien in figuur 6 dat er na twee wisselingen 98, 99 of 100 rode ballen in vaas A zitten. We willen de verwachtingswaarde van het aantal rode ballen in vaas A na twee wisselingen berekenen.
In tabel 1 staat een gedeeltelijk ingevulde kansverdeling.

tabel 1

aantal rode ballen in vaas A na twee wisselingen	98	99	100
kans		0,0198	0,0001

3p **17** ☐ Bereken de verwachtingswaarde van het aantal rode ballen in vaas A na twee wisselingen. Geef het antwoord in 2 decimalen.

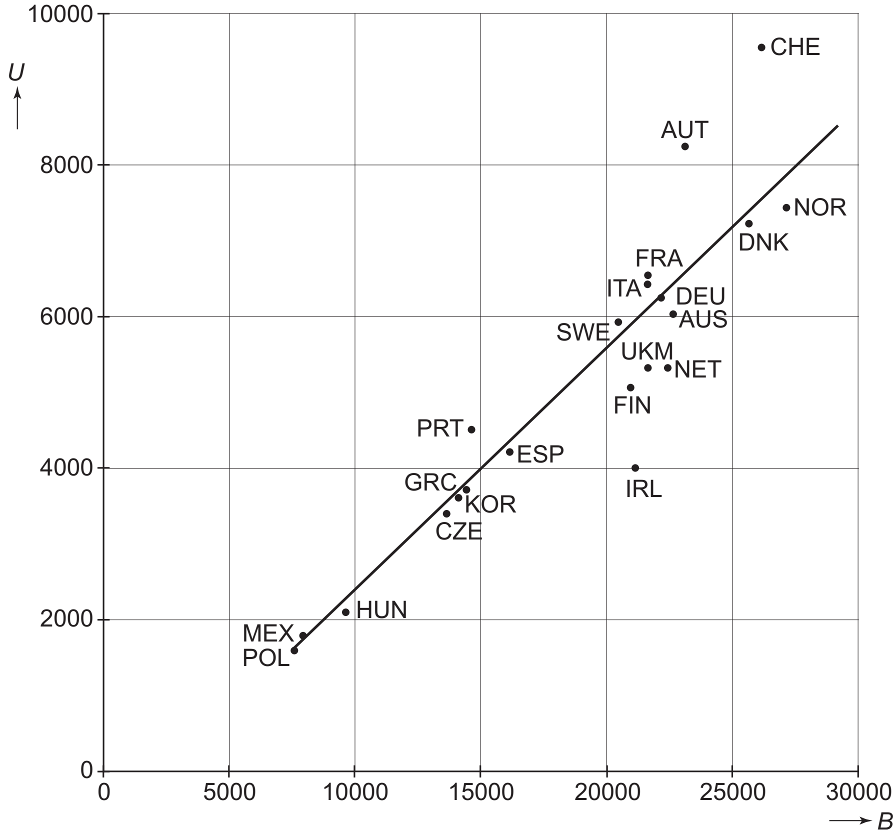
Stel dat Daniël twintig keer begint met 100 rode ballen in vaas A en 100 groene in vaas B, en dan telkens twee wisselingen uitvoert.

4p **18** ☐ Bereken de kans dat minstens één keer na de twee wisselingen situatie Q is ontstaan.

Onderwijs

De OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) doet jaarlijks onderzoek naar de onderwijsuitgaven van de landen die bij deze organisatie zijn aangesloten.
In figuur 7 is voor deze landen af te lezen hoeveel geld de overheid uitgeeft per leerling per jaar in het voortgezet onderwijs.

figuur 7



Op de horizontale as staat B, het bruto binnenlands product (bbp) per hoofd van de bevolking in euro. Verticaal staat U, de uitgaven per leerling per jaar in euro. Nederland staat in de figuur met NET aangegeven.

In Nederland zijn de uitgaven per leerling per jaar voor alle schoolsoorten in het voortgezet onderwijs (vmbo, havo en vwo) ongeveer gelijk. Een havo-leerling behaalt het diploma gemiddeld in 5,4 jaar.

3p **19** □ Bereken hoeveel geld de Nederlandse overheid gemiddeld uitgeeft aan de havo-opleiding van een leerling die een havo-diploma behaalt.

In figuur 7 is een lijn getrokken die zo goed mogelijk bij de punten past.
Een land dat op de lijn ligt en een bbp van 10 000 euro heeft, zou dan 2400 euro per leerling per jaar uitgeven. Een land op de lijn met een bbp van 25 000 euro zou dan 7200 euro per leerling per jaar uitgeven.
De USA ligt op die lijn en heeft met 36 800 euro het hoogste bbp van alle landen. Door deze hoge waarde van B is de USA niet zichtbaar in figuur 7.

5p **20** □ Stel een vergelijking van de lijn op en bereken daarmee de uitgaven per leerling per jaar in de USA.

In een jaar behaalden 30 600 leerlingen hun havo-diploma. Slechts 918 deden er 7 jaar over. De overige 29 682 deden er 5 of 6 jaar over. Het aantal dat er 5 jaar over deed, noemen we *N*. We zetten deze gegevens in een tabel:

tabel 2

aantal jaren waarin het diploma behaald is	**aantal leerlingen**	
5	N	samen 29 682
6	$29\,682 - N$	
7	918	

Gemiddeld deden deze havo-leerlingen er 5,4 jaar over.

4p **21** □ Bereken *N*.