

Pi in het oude India

Indiase wiskundigen hebben in de loop van de geschiedenis een grote bijdrage geleverd aan de wiskunde. Ze hebben onder andere onderzocht hoe je het getal π kunt benaderen. In de zesde eeuw schreef de grote Indiase wiskundige Aryabhata het volgende:

Tel vier bij honderd op, vermenigvuldig vervolgens met acht en tel er dan tweeënzestigduizend bij op. Het resultaat is bij benadering de omtrek van een cirkel met diameter twintigduizend.

- 3p 19 Bereken, gebruikmakend van de formule $omtrek\ cirkel = \pi \cdot diameter\ cirkel$, in vier decimalen nauwkeurig welke waarde hieruit volgt voor het getal π .

Het is niet duidelijk hoe Aryabhata aan deze benadering gekomen is. In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.

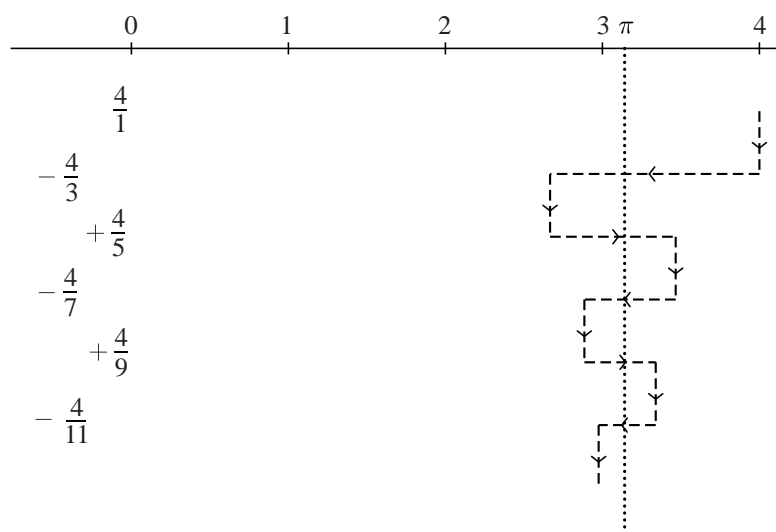
Hij begon met 4. Dat is groter dan π . Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π . Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π .

Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \dots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichterbij het getal π . Zie de figuur.

figuur



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichterbij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π . Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π .

- 3p **20** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \dots$

Hieronder staan twee mogelijke formules voor deze rij. Van deze formules is er één juist en de andere niet.

$$\text{I} \quad u_n = \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{2n-1} \text{ met } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{II} \quad u_n = \frac{(-4)^{n-1}}{2n-1} \text{ met } n = 1, 2, 3, \dots$$

- 3p **21** Onderzoek welke van deze twee formules de juiste is.

Madhava gaf ook een andere rij, die sneller tot een goede benadering van π leidde. De formule voor deze rij luidt:

$$v_n = \sqrt{12} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} \right) \text{ met } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Hiermee kon hij op soortgelijke wijze als boven een benadering van π vinden die steeds nauwkeuriger wordt naarmate meer termen gebruikt worden.

- 3p **22** Geef een benadering van π door de eerste drie termen van deze rij bij elkaar op te tellen en bereken het verschil met de werkelijke waarde van π in twee decimalen nauwkeurig.