Uitslagen voorspellen

In de tijd voor Tweede Kamerverkiezingen worden allerlei onderzoeken gedaan naar kiezersgedrag.
Media publiceren vrijwel elke dag voorspellingen gebaseerd op onderzoek. Zo ging het ook voor de verkiezingen in juni 2010. Op 3 juni publiceerde de krant Tubantia de persoonlijke voorspellingen van elf lijsttrekkers over de te verwachten zetelverdeling voor de elf partijen. Zie tabel 1. Deze tabel staat vergroot op de uitwerkbijlage.

tabel 1

	PVV	SP	GroenLinks	Trots op NL	PvdA	CDA	D66	VVD	P.v.d.Dieren	SGP	ChristenUnie
	G. Wilders	E. Roemer	F. Halsema	R. Verdonk	J. Cohen	J.P. Balkenende	A. Pechtold	M. Rutte	M. Thieme	K. v.d. Staaij	A. Rouvoet
CDA	29	27	29	28	27	34	26	29	24	28	28
PvdA	29	30	33	26	35	28	28	29	29	27	32
SP	10	18	11	14	9	17	13	11	21	12	10
VVD	29	29	31	27	34	32	30	34	31	34	32
PVV	25	15	11	14	16	12	15	17	12	17	14
GroenLinks	8	10	13	9	9	9	12	10	9	10	10
ChristenUnie	8	7	6	6	7	5	6	6	6	7	10
D66	8	10	12	10	9	10	15	10	12	10	10
P.v.d.Dieren	1	2	2	3	2	1	3	2	4	2	2
SGP	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
Trots op NL	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
Totaal	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150

In tabel 1 valt onder andere op dat de voorspellingen van Wilders en Thieme behoorlijk van elkaar verschillen, terwijl de voorspellingen van Rutte en Van der Staaij tamelijk dicht bij elkaar liggen.
Om voorspellingen met elkaar te kunnen vergelijken, gebruiken we het begrip **afstand**. Om de afstand tussen twee voorspellingen te berekenen, tellen we alle verschillen tussen de voorspelde zetelaantallen bij elkaar op. Zo is de afstand tussen de voorspellingen van Roemer (lijsttrekker SP) en Halsema (lijsttrekker GroenLinks) 24, want de som van de positieve verschillen tussen hun voorspellingen is:

$$(29-27)+(33-30)+(18-11)+(31-29)+(15-11)+$$
$$(13-10)+(7-6)+(12-10)+(2-2)+(2-2)+(0-0)=24$$

3p **1** Onderzoek of de afstand tussen de voorspellingen van Wilders en Thieme meer dan twee maal zo groot is als de afstand tussen de voorspellingen van Roemer en Halsema.

Na afloop van de verkiezingen kun je de voorspellingen van ieder van de lijsttrekkers met de werkelijke uitslag vergelijken. Dat doen we hier op twee verschillende manieren. Bij de eerste methode berekenen we de **afstand tussen de voorspelling en de werkelijke uitslag**. Die werkelijke uitslag van de verkiezingen op 9 juni 2010 staat in tabel 2.

tabel 2

partij	CDA	PvdA	SP	VVD	PVV	GL	CU	D66	PvdD	SGP	TON
werkelijk aantal zetels	21	30	15	31	24	10	5	10	2	2	0

De voorspelling van Roemer blijkt de kleinste afstand, namelijk 22, tot de werkelijke uitslag op te leveren.
De afstand tussen de voorspelling van Wilders en de werkelijke uitslag blijkt exact gelijk te zijn aan de afstand tussen de voorspelling van Van der Staaij en de werkelijke uitslag.

2p **2** Bereken deze afstand.

Een andere methode om voorspellingen te vergelijken met de werkelijke uitslag is om te kijken naar het totaal **aantal juist voorspelde zetels**. Als een partij bijvoorbeeld 8 zetels haalt terwijl er 5 voorspeld zijn, dan krijgt de voorspeller daar 5 punten voor. En als er 8 zetels behaald worden terwijl er 10 voorspeld zijn, dan krijgt de voorspeller 8 punten.
Op deze manier is het aantal juist voorspelde zetels van Roemer:

$$21+30+15+29+15+10+5+10+2+2=139$$

Als je het aantal juist voorspelde zetels van Wilders vergelijkt met het aantal juist voorspelde zetels van Van der Staaij, blijkt ook nu weer dat deze aantallen aan elkaar gelijk zijn.

2p **3** Bereken het aantal juist voorspelde zetels bij deze twee lijsttrekkers.

Dat deze aantallen aan elkaar gelijk zijn, is niet toevallig als je kijkt naar het aantal juist voorspelde zetels en de afstand tussen de voorspelling en de werkelijke uitslag. Tussen deze afstand (de eerste methode) en het aantal juist voorspelde zetels (de tweede methode) bestaat een verband. Bij de afstand let je op de verschillen (altijd positief) en bij de tweede methode tel je het aantal goed voorspelde zetels. Het verband heeft de volgende vorm:

$$\text{aantal juist voorspelde zetels } = a \cdot \text{afstand} + b$$

4p **4** Bereken de waarden van a en b in bovenstaand verband.

1

	PVV	SP	GroenLinks	Trots op Nederland	PvdA	CDA	D66	VVD	Partij voor de Dieren	SGP	ChristenUnie
	G. Wilders	E. Roemer	F. Halsema	R. Verdonk	J. Cohen	J.P. Balkenende	A. Pechtold	M. Rutte	M. Thieme	K. v.d. Staaij	A. Rouvoet
CDA	29	27	29	28	27	34	26	29	24	28	28
PvdA	29	30	33	26	35	28	28	29	29	27	32
SP	10	18	11	14	9	17	13	11	21	12	10
VVD	29	29	31	27	34	32	30	34	31	34	32
PVV	25	15	11	14	16	12	15	17	12	17	14
GroenLinks	8	10	13	9	9	9	12	10	9	10	10
ChristenUnie	8	7	6	6	7	5	6	6	6	7	10
D66	8	10	12	10	9	10	15	10	12	10	10
Partij voor de Dieren	1	2	2	3	2	1	3	2	4	2	2
SGP	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	2
Trots op Nederland	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
Totaal	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150

Hogeschool voor de Kunsten

Bij de Hogeschool voor de Kunsten in Utrecht stond een kunstwerk in de vorm van een kubus waarvan één hoekpunt is afgezaagd. Er zijn enkele foto's gemaakt met de camera op verschillende hoogte.

foto 1

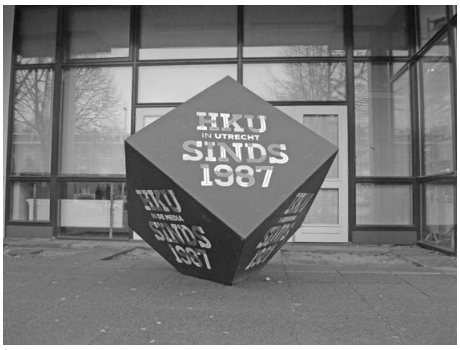


foto 2

Voordat het kunstwerk werd gemaakt, is eerst een schaalmodel gemaakt. De ribben van het schaalmodel zijn tien keer zo klein als die van het kunstwerk.

2p **5** Bereken de verhouding tussen de inhoud van het schaalmodel en de inhoud van het kunstwerk.

Zoals je op de foto's 1 en 2 kunt zien, hangt het aantal zijvlakken dat je ziet af van de plek waar je staat.

2p **6** Noem alle aantallen zijvlakken die mogelijk zijn.

Op foto 1 lijkt het kunstwerk hoger dan de witte deur erachter. Op foto 2 lijkt het kunstwerk ongeveer even hoog als de deur. Foto 2 is op ongeveer 150 cm hoogte genomen. De hoogte van de deur is in werkelijkheid 230 cm.

3p **7** Leg uit dat het kunstwerk in werkelijkheid lager is dan de witte deur.

Op de uitwerkbijlage staat nog een foto van het kunstwerk.

4p **8** Geef op de uitwerkbijlage op de deur aan op welke hoogte de foto genomen werd en bereken deze hoogte. Rond je antwoord af op gehele dm.

uitwerkbijlage

8

Versregels

In het Sanskriet, de taal van het oude India, gebruikte men in gedichten veel verschillende patronen van korte en lange lettergrepen.
De Indiase geleerde Pingala onderzocht al voor het begin van de jaartelling hoeveel patronen er mogelijk waren met een vast aantal lettergrepen.
Met één lettergreep zijn er 2 mogelijkheden, namelijk kort (K) en lang (L), met twee lettergrepen zijn er 4 mogelijkheden, namelijk KK, KL, LK en LL.
Met één of twee lettergrepen zijn er dus in totaal 6 mogelijkheden.

3p **9** Bereken hoeveel mogelijkheden er in **totaal** zijn met drie, vier of vijf lettergrepen.

De geleerde Hemachandra keek niet naar patronen met een vast aantal lettergrepen, maar beschreef een manier om het aantal mogelijkheden te tellen voor versregels met een vaste lengte.
Zijn methode werkt als volgt:
Een lange lettergreep (L) is tweemaal zo lang als een korte lettergreep (K).
Er is één mogelijkheid met lengte 1, namelijk K. Er zijn twee mogelijkheden met lengte 2, namelijk L en KK. Het aantal mogelijkheden met lengte 3 kunnen we nu vinden door achter de mogelijkheid met lengte 1 een lange lettergreep te zetten (KL) of achter de mogelijkheden met lengte 2 een korte lettergreep te zetten (LK en KKK). In totaal dus drie mogelijkheden.
Op dezelfde manier kunnen we het aantal mogelijkheden met lengte 4 vinden door achter de mogelijkheden met lengte 2 een lange lettergreep te zetten of achter de mogelijkheden met lengte 3 een korte lettergreep.
Alle mogelijkheden tot en met lengte 4 staan in de tabel.

tabel

lengte	1	2	3	4	5	6
aantal mogelijkheden	1	2	3	5	8	13
mogelijkheden	K	L KK	KL LK KKK	LL KKL KLK LKK KKKK		

4p **10** Schrijf op soortgelijke wijze alle 8 mogelijkheden op voor versregels met lengte 5.

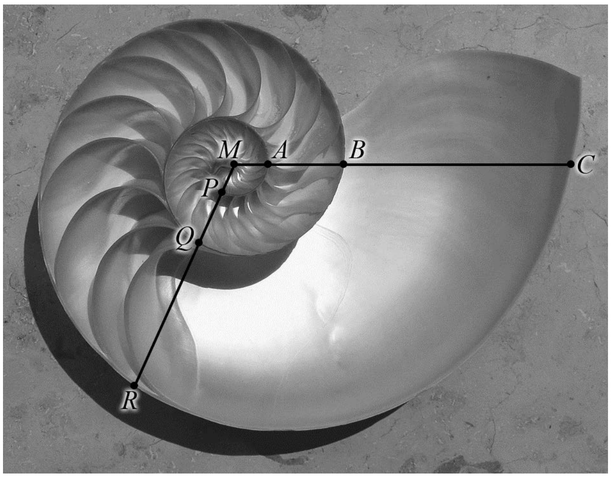
Om het aantal mogelijkheden te berekenen is het niet nodig alle mogelijkheden uit te schrijven.

4p **11** Bereken het aantal mogelijkheden voor een versregel met lengte 10.

Spiraalvormen

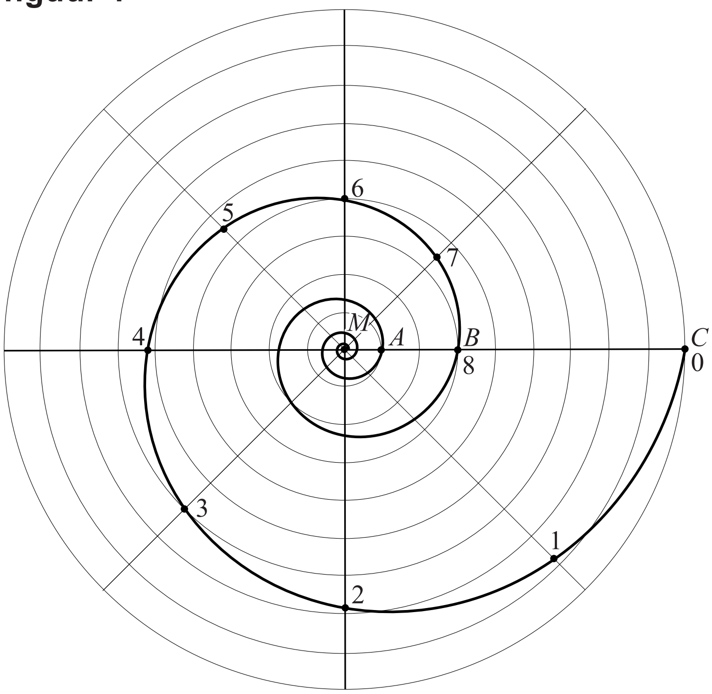
Op de foto zie je de binnenkant van een Nautilusschelp. In deze schelp is een bijzondere spiraalvorm te zien. Er is een horizontale lijn getekend vanuit het midden van de schelp M. Die lijn snijdt de schelpwanden in de punten A, B en C. De afstand van het midden tot zo'n snijpunt neemt bij benadering steeds toe met dezelfde groeifactor. Er geldt: $MB \approx 3 \cdot MA$ en $MC \approx 3 \cdot MB$. Deze eigenschap geldt ook als je in een willekeurige andere richting een lijn vanuit het midden trekt, bijvoorbeeld de lijn waarop P, Q en R liggen. Een spiraal met deze eigenschap heet een **groeispiraal**.

foto



In figuur 1 is de groeispiraal die hoort bij de Nautilusschelp getekend in een cirkelvormig rooster[1]. $MC = 9$, $MB = 3$ en $MA = 1$.

figuur 1



noot 1 Wiskundig gezien loopt de spiraal in het midden steeds door, maar op den duur wordt hij te klein om te tekenen.

We bekijken de spiraal nu van buiten naar binnen. Te beginnen bij punt C zijn er op de spiraal punten getekend met de nummers 0 tot en met 8. Voor het volgende punt moet je steeds een hoek van 45º verder draaien. De afstanden van het midden M tot de punten 0, 1, 2, 3 en 4 staan in de tabel.

tabel

punt	0	1	2	3	4
afstand tot middelpunt M	9,00	7,85	6,84	5,96	5,20

De afstanden in de tabel nemen af met een vaste groeifactor.

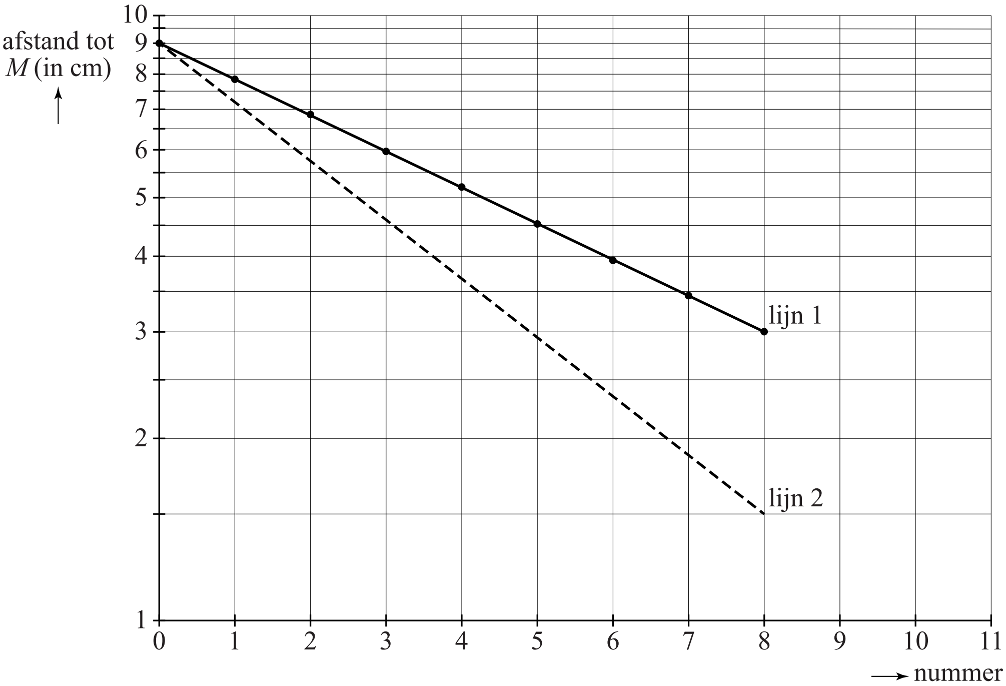
4p **12** Toon dit aan voor alle in de tabel genoemde punten en geef deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij een andere groeifactor hoort een andere spiraal. Op de uitwerkbijlage zie je de punten M, T en S getekend. $MS = 8$ cm en $MT = 4$ cm. Een groeispiraal begint in punt S en is na één winding (één keer rondgaan) in punt T aangekomen.

6p **13** Teken het gedeelte van de groeispiraal tussen punt S en punt T in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je antwoord toe met berekeningen.

Een groeispiraal heet ook wel **logaritmische spiraal.** Als we de punten uit de tabel uitzetten op roosterpapier waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft, liggen deze punten op een rechte lijn. Zie lijn 1 in figuur 2.

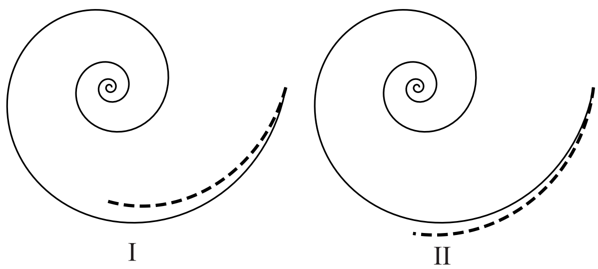
figuur 2



Lijn 1 hoort bij de spiraal van figuur 1. Bij deze lijn hoort de formule $A = 9 \cdot 0{,}87^n$. Hierin is n het nummer van het punt en A de afstand van het punt tot het middelpunt M. Lijn 2 (gestippeld) in figuur 2 hoort bij een andere spiraal. Ook bij lijn 2 hoort een exponentiële groeiformule.

In figuur 3 zijn twee mogelijke situaties I en II geschetst. De volledig getekende spiraal hoort bij lijn 1 uit figuur 2. Het gestippelde deel is het begin van de spiraal die hoort bij lijn 2 uit figuur 2.

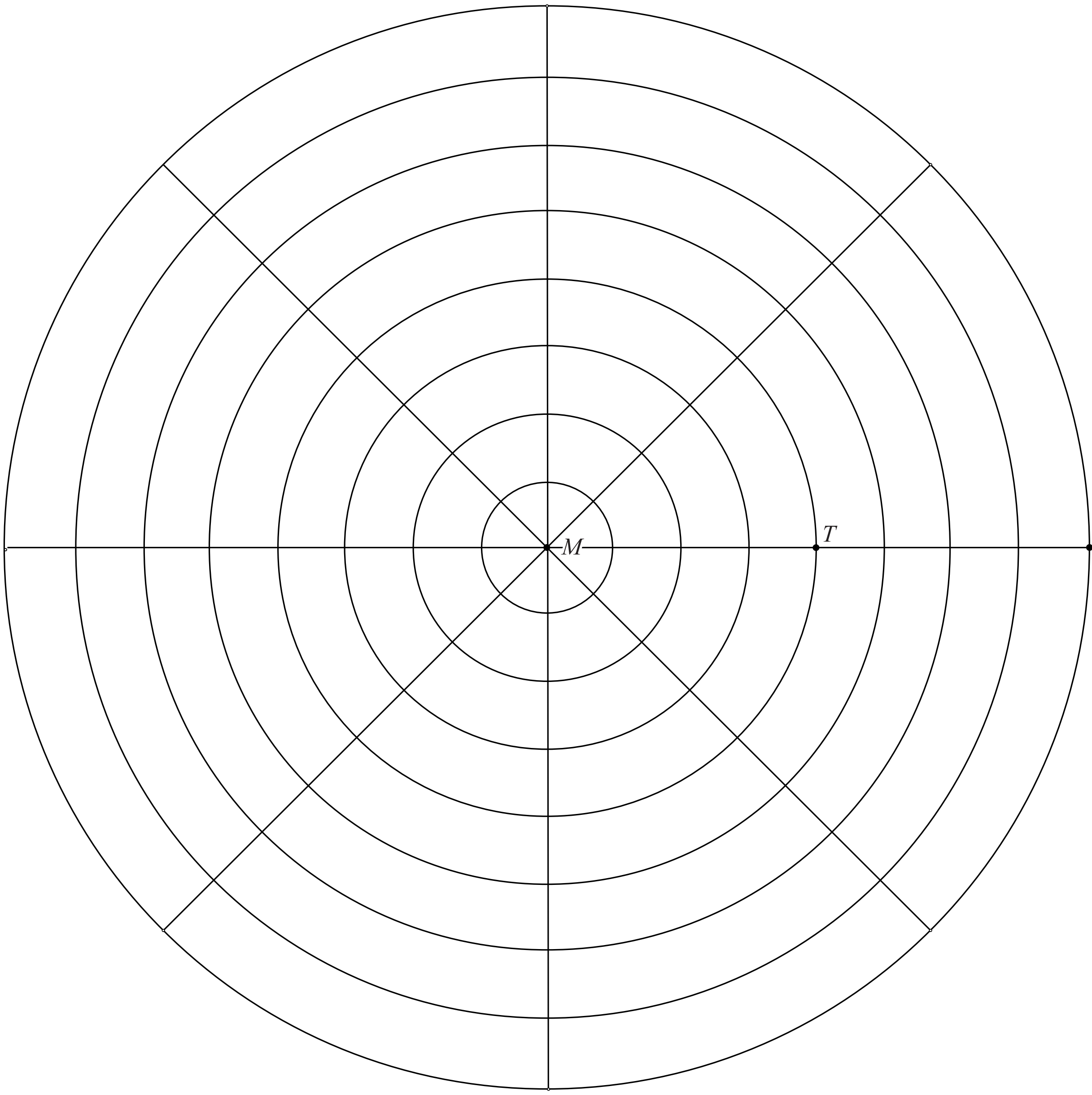
figuur 3



3p **14** Leg uit met behulp van figuur 2 welke van beide situaties I of II de juiste is en geef aan of de groeifactor in de formule die bij lijn 2 hoort groter of kleiner dan 0,87 zal zijn.

uitwerkbijlage

13



Keramiek

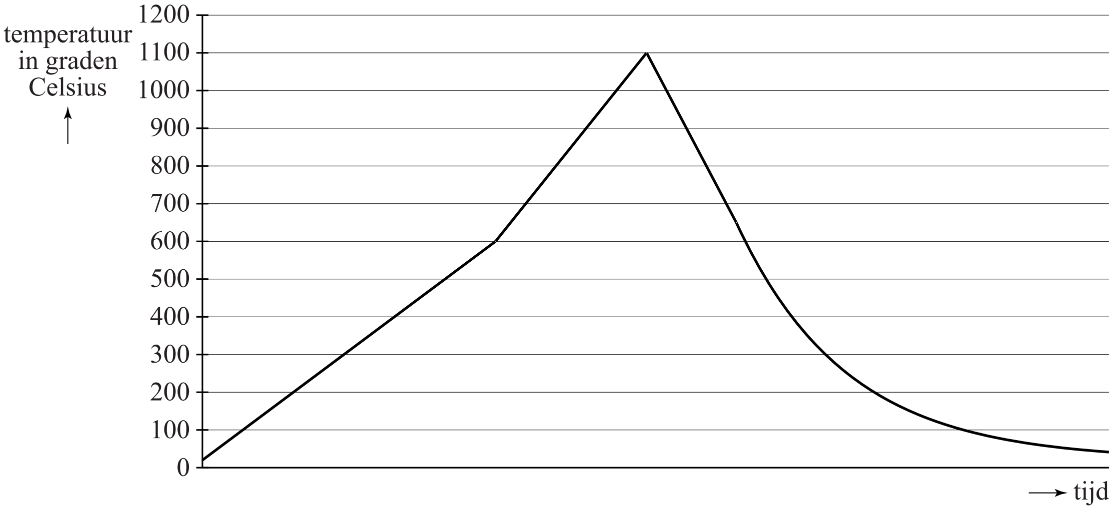
Op de foto zie je een stad van keramiek, gemaakt door de kunstenares Elly van de Merwe.
De huisjes zijn in 3 rijen geplaatst. Er zijn 13 huisjes in het kunstwerk zelf en er is nog 1 reservehuisje.
De voorste rij heeft 4 posities om huisjes te plaatsen, de middelste rij heeft 5 posities en de achterste weer 4 posities.
De opstelling van de huisjes kan veranderd worden. Je kunt daarbij de huisjes op de voorste rij en de huisjes op de middelste rij willekeurig verwisselen. De huisjes op de achterste rij kunnen alleen onderling verwisseld worden. Het reservehuisje past alleen op de voorste twee rijen.

foto

4p **15** Bereken hoeveel opstellingen er mogelijk zijn met de 14 verschillende huisjes.

De huisjes zijn gemaakt van kleiplaten en twee keer gebakken.
Om kapotspringen van het werk te voorkomen, moet de temperatuur bij de eerste keer bakken heel precies geregeld worden. Dit is goed mogelijk in een elektrische oven, die met een computer bestuurd wordt. In onderstaande figuur zie je een grafiek van de temperatuur tijdens het bakproces.

figuur



Het bakproces bestaat uit vier fasen:
– fase 1: de oven gaat aan en men laat de temperatuur in 9 uur en 40 minuten met een constante stijging van 20 ºC naar 600 ºC oplopen;
– fase 2: in de volgende 5 uur houdt men een constante stijging aan van 600 ºC tot de maximale temperatuur 1100 ºC;
– fase 3: men laat nu de oven afkoelen tot 650 ºC met een constante daling van 150 ºC per uur (de oven is nog aan);
– fase 4: bij 650 ºC zet men de oven uit en de temperatuur daalt nu volgens een afnemend dalende grafiek.

4p **16** Onderzoek of de gemiddelde temperatuurstijging in fase 2 meer dan twee keer zo groot is als in fase 1.

Bij het begin van fase 4 wordt de oven uitgezet. Vanaf dat moment neemt het **verschil** tussen de oventemperatuur en omgevingstemperatuur bij benadering exponentieel af. Zie de tabel. Hierbij is uitgegaan van een constante omgevingstemperatuur van 20 ºC.

tabel

tijdstip t na het uitzetten van de oven	0 uur	4 uur	8 uur
oventemperatuur (in ºC)	650	225	90
verschil V tussen oventemperatuur en omgevingstemperatuur (in ºC)	630	205	70

Omdat het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur, dus V, bij benadering exponentieel afneemt, kan dit verschil tijdens fase 4 worden beschreven met de formule:

$$V = b \cdot g^t$$

Hierin is V het verschil tussen oven- en omgevingstemperatuur in ºC en t de tijd in uren na het uitzetten van de oven.

6p **17** Bereken met behulp van deze formule hoeveel minuten na het uitzetten van de oven deze is afgekoeld tot 30 ºC.

Nadat de huisjes uit de oven zijn gehaald, wordt er een laagje glazuur op aangebracht. Hierna worden ze een tweede keer gebakken in een speciale oven die buiten staat, een zogenoemde Raku oven. Na het opwarmen tot 1000 ºC worden de huisjes met een tang uit de oven gehaald. Doordat ze in de buitenlucht snel afkoelen, ontstaan er barstjes in het glazuur. Zie de foto bij het begin van de opgave.
Voor een bepaald huisje geldt tijdens het afkoelingsproces de volgende formule:

$$T = 20 + 980 \cdot 0{,}93^t$$

Hierin is T de temperatuur van het huisje in ºC en t de tijd in minuten nadat het uit de oven is gehaald.

3p **18** Leg met behulp van een schets van de grafiek van T uit of het huisje vanaf het moment dat het uit de oven wordt gehaald steeds sneller of steeds minder snel zal afkoelen.

Hoogopgeleid?

In figuur 1 zie je de eerste twee plaatjes van een cartoon die enige tijd geleden in de Volkskrant stond.

figuur 1

Om de discussie in deze twee plaatjes te modelleren gebruiken we de volgende afkortingen:

- H : iemand is hoogopgeleid;
- O : iemand 'wordt oud en blijft lang gezond'.

Verder gaan we ervan uit dat er in beide gevallen maar twee mogelijkheden zijn:

- iemand is hoogopgeleid of niet;
- iemand 'wordt oud en blijft lang gezond' of dat gebeurt niet.

We modelleren nu de beweringen in de twee plaatjes als volgt:
De oude man zegt in het eerste plaatje: "Als iemand hoogopgeleid is, dan wordt hij oud en blijft hij lang gezond." Met behulp van bovenstaande afkortingen en met logische symbolen kunnen we dat vertalen als: $H \Rightarrow O.$
In het tweede plaatje zegt de oude man: "Ik ben niet hoogopgeleid en toch oud geworden en lang gezond gebleven."

2p **19** Onderzoek of de uitspraak van de oude man in het tweede plaatje in tegenspraak is met de bewering $H \Rightarrow O.$ Licht je antwoord toe.

In het tweede plaatje gebruikt de oude man het woordje 'toch'. Daaruit blijkt dat hij vindt dat er een tegenspraak is. De oude man onderscheidt kennelijk twee soorten mensen: hoogopgeleiden, die worden oud en blijven lang gezond en niet-hoogopgeleiden, waarvoor niet geldt dat ze 'oud worden en lang gezond blijven'. Dit laatste kun je vertalen in: $\neg H \Rightarrow \neg O.$

2p **20** Leg uit dat deze laatste bewering in tegenspraak is met de uitspraak van de oude man in het tweede plaatje.

In figuur 2 zie je de complete cartoon.

figuur 2

Sigmund trekt in het derde plaatje de volgende conclusie: De man is oud geworden en lang gezond gebleven, dus hij moet wel hoogopgeleid zijn, oftewel: $O \Rightarrow H$.

2p **21** Onderzoek of de bewering $O \Rightarrow H$ in overeenstemming is met $H \Rightarrow O$ of met $\neg H \Rightarrow \neg O$. Geef een toelichting bij je antwoord.

De werkelijkheid is ingewikkelder dan bovenstaande logische beweringen. Er is onderzoek gedaan naar het verband tussen opleiding, levensduur en gezondheid. Uit een dergelijk onderzoek blijkt bijvoorbeeld het volgende:
- van alle hoogopgeleiden wordt 70% oud en blijft lang gezond;
- van alle niet-hoogopgeleiden wordt 50% oud en blijft lang gezond.

In deze vereenvoudigde situatie gaan we er weer vanuit dat er steeds maar twee mogelijkheden zijn: iemand is hoogopgeleid of niet en iemand 'wordt oud en blijft lang gezond' of dat gebeurt niet.

Hieronder staan vier mogelijke conclusies:

A Als iemand hoogopgeleid is, wordt hij oud en blijft hij lang gezond.
B Voor niet-hoogopgeleiden geldt dat ze minder vaak oud worden en lang gezond blijven dan hoogopgeleiden.
C De meeste mensen die oud worden en lang gezond blijven, zijn hoogopgeleid.
D Een deel van de niet-hoogopgeleiden wordt oud en blijft lang gezond.

4p **22** Geef van elk van de vier bovenstaande conclusies aan of deze uit het genoemde onderzoek volgen. Licht je antwoord toe.