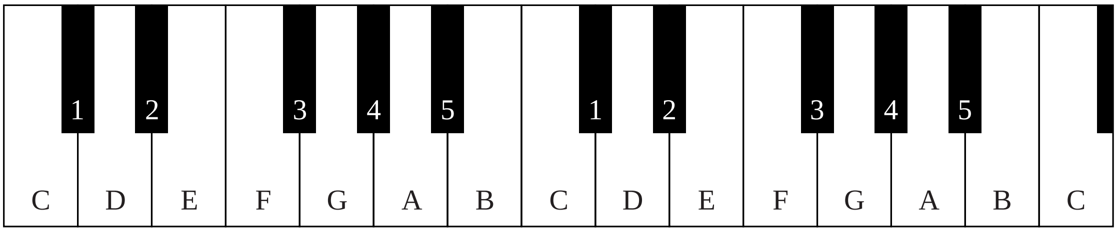
De piano

figuur 1



In figuur 1 staat een gedeelte van het toetsenbord van een piano afgebeeld. De witte en de zwarte toetsen stellen allemaal verschillende tonen voor. Op de witte toetsen staat ook de naam van de bijbehorende toon. Voor tonen die bij de zwarte toetsen horen, bestaan meerdere namen. In figuur 1 zijn ze daarom genummerd.

Als je een toets aanslaat op de piano, dan zorgt dat ervoor dat er een snaar gaat trillen. De snelheid van die trilling bepaalt de toon die je hoort. De snelheid waarmee een snaar trilt, noemen we de **frequentie**. De frequentie is het aantal trillingen per seconde en heeft Hertz (Hz) als eenheid.

Bijvoorbeeld: de linker toon F in figuur 1 heeft een frequentie van 352 Hz. Dat betekent dus dat de snaar die deze toon F voortbrengt 352 keer per seconde trilt.

Bij de linker toon A in figuur 1 hoort een frequentie van 440 Hz.

3p **1** Bereken hoeveel seconden één trilling die bij deze toon A hoort, duurt. Geef je antwoord in vier decimalen.

Als de frequentie van een toon twee keer zo groot is als die van een andere toon, dan vormen deze twee tonen samen een octaaf. Dus: de toon A met een frequentie van 440 Hz en een toon met een frequentie van 880 Hz vormen samen een octaaf van A. Deze tonen krijgen dezelfde naam, dus ook de toon met een frequentie van 880 Hz noemen we A: dat is de rechter A in figuur 1.

Op de meeste moderne piano's is de laagste toon een A met een frequentie van 27,5 Hz. De hoogste A heeft een frequentie van 3520 Hz.

4p **2** Bereken hoeveel octaven van A zo'n piano omvat.

Twee opeenvolgende C's in figuur 1 vormen samen een octaaf van C. Voor twee opeenvolgende C's geldt dat de frequentie van de rechter C twee keer zo groot is als die van de linker C, oftewel: de verhouding van hun frequenties is $2:1$.

Bij het stemmen van een piano wordt ervoor gezorgd dat de verhouding van de frequenties van twee opeenvolgende tonen in een serie als C-1-D-2-E-F-3-G-4-A-5-B-C precies gelijk is. Zie figuur 1.

Zo geldt bijvoorbeeld: $\dfrac{\text{frequentie toon F}}{\text{frequentie toon E}} = \dfrac{\text{frequentie toon E}}{\text{frequentie toon 2}}$

Elk van deze verhoudingen is (ongeveer) $1,0595:1$.

3p **3** Laat met een berekening zien dat deze verhouding juist is.

In de praktijk is het werken met deze frequentieverhoudingen niet zo handig. Daarom wordt meestal de zogenaamde **toonafstand (*TA*)** gebruikt. De eenheid van de toonafstand is **cent**.

Er geldt: $TA = a \cdot \log\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)$

In deze formule is $\dfrac{f_2}{f_1}$ de frequentieverhouding van twee tonen.

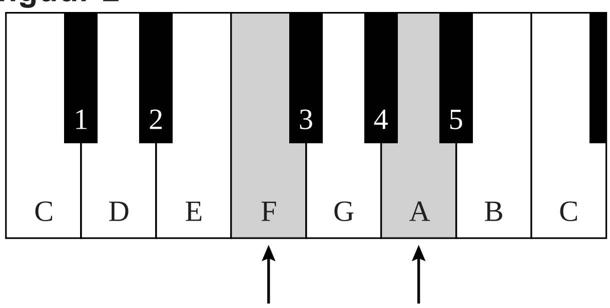
De waarde van a in de formule is zó gekozen dat de toonafstand tussen twee opeenvolgende tonen precies gelijk is aan 100 cent.

Als je uitgaat van het hierboven genoemde getal 1,0595 en daarmee a berekent, dan moet, afgerond op één decimaal, gelden: $a = 3983,9$.

3p **4** Bereken op deze wijze de waarde van a in drie decimalen.

De toonafstand tussen twee tonen waar één toon tussen zit, is bij een gestemde piano 200 cent. Zitten er twee tonen tussen, dan is de toonafstand 300 cent, enzovoort.

figuur 2



Als je op een piano meer toetsen tegelijk aanslaat, krijg je een samengestelde klank. Zo kun je een F en de rechts ervan gelegen A tegelijk aanslaan: zie figuur 2. De frequentieverhouding van de tonen in deze samengestelde klank is volgens de muziektheorie gelijk aan $5:4$. Met deze verhouding kun je een toonafstand berekenen volgens de muziektheorie. Je kunt de toonafstand ook berekenen door uit te gaan van het idee dat bij een gestemde piano tussen elke twee opeenvolgende tonen 100 cent zit.
Op een gestemde piano wijkt de toonafstand (*TA*) van de bovenvermelde (uit F en A) samengestelde klank iets af van de toonafstand die volgens de muziektheorie moet gelden.

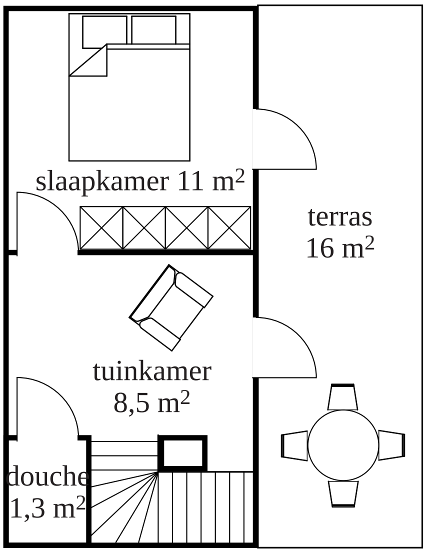
4p **5** Bereken hoeveel cent deze afwijking bedraagt. Geef je antwoord als een geheel getal.

Dakopbouw

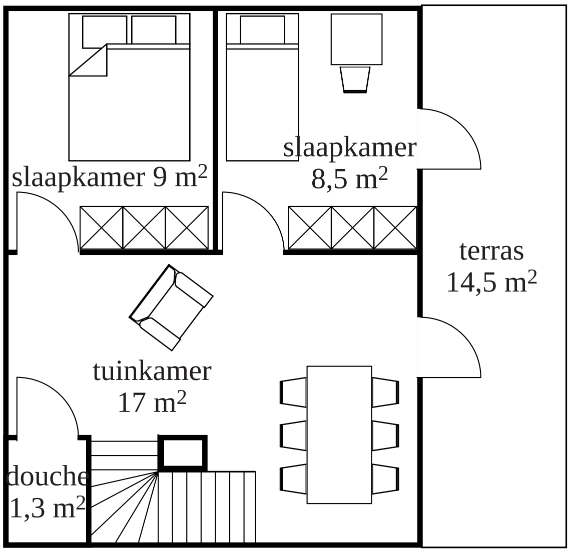
Een architectenbureau heeft voor volle steden een mogelijkheid bedacht om huizen met een plat dak uit te breiden: een dakopbouw die relatief weinig kost, snel te plaatsen is en gemakkelijk is aan te passen aan de individuele wensen van een klant. Aan de hand van deze wensen wordt door middel van een computerprogramma voor elke klant een ontwerp gemaakt, uitgaande van een aantal basismodellen.

Bij een van de modellen kan een klant kiezen voor een kleine dakopbouw die, als er nog ruimte is op het platte dak, later eventueel uit te breiden is. In figuur 1 zie je de plattegrond van deze dakopbouw met een buitenterras vóór de uitbreiding. In figuur 2 zie je de plattegrond met een buitenterras ná de uitbreiding. In deze figuren staan ook oppervlaktes vermeld. De dakopbouw heeft overal een binnenhoogte van 2,60 meter, zowel voor als na de uitbreiding.

figuur 1



figuur 2

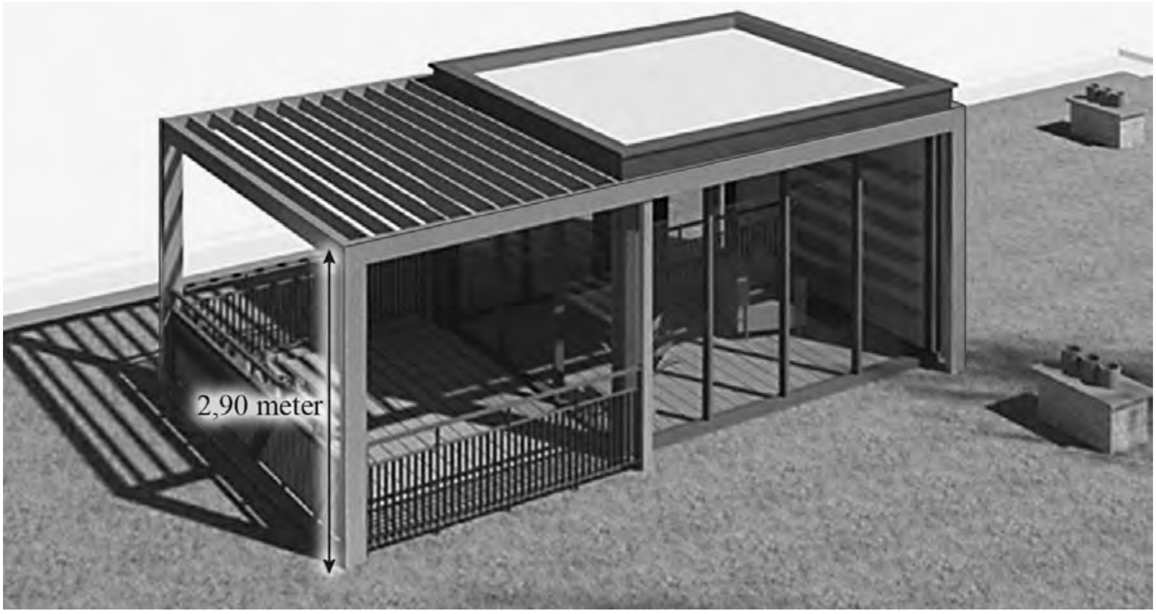


Door de uitbreiding veranderen de oppervlaktes van douche en trapgat niet.

3p **6** Bereken met hoeveel m^3 de inhoud van het binnengedeelte van de dakopbouw toeneemt bij de uitbreiding.

In figuur 3 zie je een perspectieftekening van een ander basismodel. In figuur 3 zie je dat de lengte van de staande balk van dit basismodel 2,90 meter is.

figuur 3



Voor het in figuur 3 gekozen perspectief – waarbij de horizon horizontaal loopt – heeft men in het computerprogramma een denkbeeldig punt aan moeten geven van waaruit het perspectief getekend moest worden.

4p **7** Bereken met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage op welke hoogte dit denkbeeldige punt gekozen is. Geef je antwoord in gehele meters.

De dakopbouw is dus naar wens aan te passen. Een potentiële klant wil een beeld krijgen hoe de dakopbouw eruit zou zien als het basismodel van figuur 3 wordt uitgebreid met een piramidevormig dak. Dit piramidevormige dak wordt op de donkergrijze dakrand boven de kamer geplaatst waardoor de hele dakopbouw anderhalf keer zo hoog wordt. De top T van het piramidevormige dak komt precies boven het midden van het huidige dak van de opbouw. Figuur 3 staat nogmaals op de uitwerkbijlage.

5p **8** Teken de top T en daarna de rest van het piramidevormige dak in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

uitwerkbijlage

7

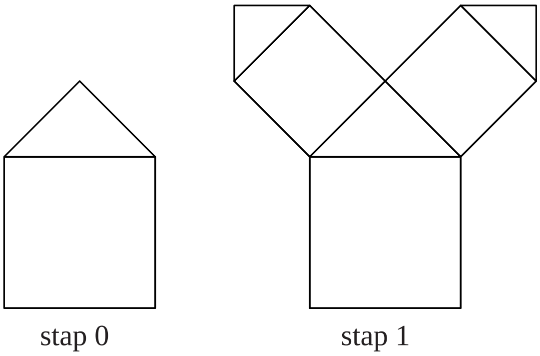
uitwerkbijlage

8

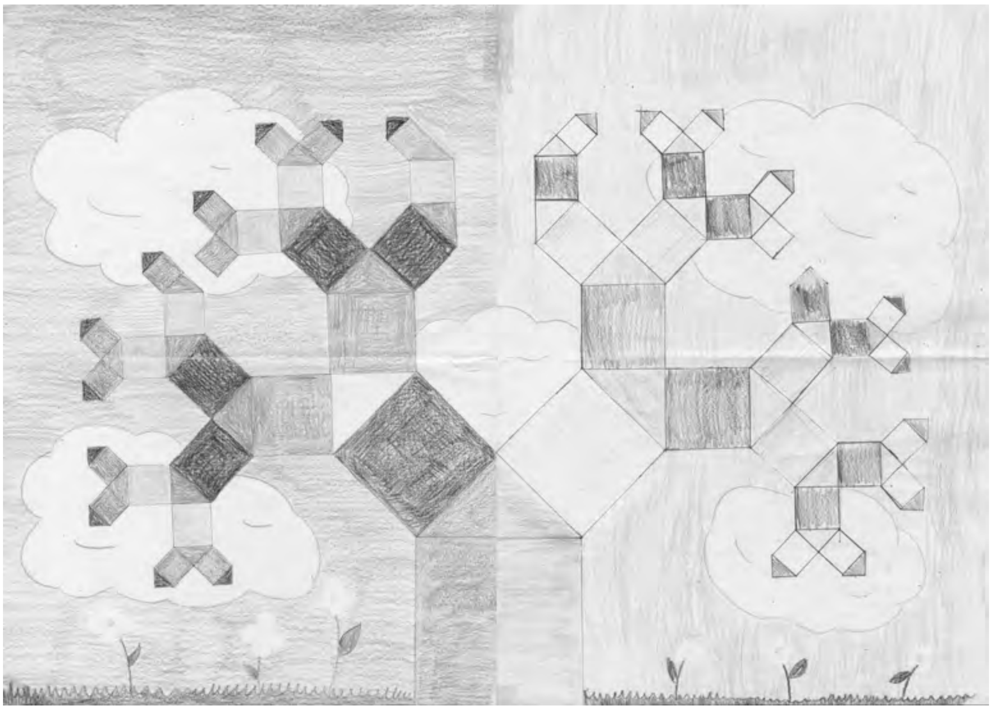
Boom van Pythagoras

Veel mensen hebben weleens de boom van Pythagoras gezien. Deze boom bestaat uit vierkanten en gelijkbenige rechthoekige driehoeken. In figuur 1 staat het begin van zo'n boom en in figuur 2 een door (twee) leerlingen verder uitgewerkte tekening van die boom.

figuur 1



figuur 2



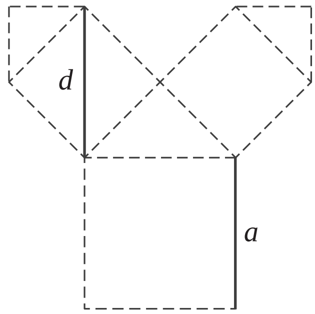
De boom in figuur 2 begint onderaan in het midden van de lange zijde van het papier met een vierkant en daarop een passende gelijkbenige rechthoekige driehoek. Het vierkant en de driehoek samen noemen we stap 0. Bij iedere volgende stap komt er op elke rechthoekszijde van de driehoek steeds een vierkant met daarop weer een passende driehoek bij. Het vierkant past steeds precies op de rechthoekszijde. Zie ook figuur 1.

Je kunt aantonen dat de oppervlaktes van de vierkanten in elke volgende stap half zo groot worden. Anders gezegd: je kunt aantonen dat, als we de oppervlakte van een vierkant a^2 noemen, de oppervlakte van het vierkant in de volgende stap $\frac{1}{2}a^2$ is.

3p **9** Toon dit aan.

Een gevolg hiervan is dat de lengte d van de diagonaal in het vierkant in de volgende stap precies gelijk is aan de hoogte a van het vierkant in de vorige stap. Zie figuur 3.

figuur 3



Hans wil ook een boom van Pythagoras tekenen en begint in het midden van de onderkant van zijn papier met een onderste vierkant van 10 cm bij 10 cm. Hij heeft een vel papier met afmetingen 420 mm bij 594 mm tot zijn beschikking. Hij vraagt zich af of hij wel tot en met stap 5 kan komen met zijn boom. Hij zorgt ervoor dat de zijde van 594 mm de onderkant van zijn tekenpapier is.

4p **10** Onderzoek met een berekening of de hoogte van deze boom van Pythagoras tot en met stap 5 op dit vel past.

De lengtes van de zijden van de opeenvolgende vierkanten vormen een rij waarin elk volgend getal met een vaste factor vermenigvuldigd wordt. Fleur gaat een boom van Pythagoras tekenen. Haar tekenpapier is groot genoeg voor heel veel stappen. Ze begint met een vierkant van 13 cm bij 13 cm. Ze kan geen vierkantje tekenen met een zijde die kleiner dan 1 mm is.

4p **11** Bereken na welke stap Fleur stopt met tekenen.

Bij het tekenen van een boom van Pythagoras wordt het aantal nieuwe vierkanten A bij elke volgende stap verdubbeld. Vandaar dat geldt:

$A_n = 2^n$ met $A_0 = 1$ waarbij n het stapnummer is.

Om te bepalen wat het totale aantal getekende vierkantjes tot en met een bepaalde stap n is, kun je een somformule S_n gebruiken.

Als je de getallen uit de rij b, br, br^2, br^3,…, br^n op wilt tellen, geldt de somformule die hoort bij een exponentieel verband: $S_n = \dfrac{b(1-r^{n+1})}{1-r}$

4p **12** Bereken bij welke stap het totale aantal vierkantjes voor het eerst meer dan 2000 is.

Welke van de tien?

In april 2015 zette een tv-presentator uit Singapore een puzzel op het internet die afkomstig was uit een toets voor basisschoolkinderen van een school voor hoogbegaafde kinderen. De puzzel ging vervolgens de hele wereld over, want iedereen vroeg zich af hoe je hem eigenlijk op moest lossen.

Een variant van die puzzel is de volgende:

Amir en Bob hebben net Carina leren kennen en ze willen graag weten wanneer ze jarig is. Carina geeft ze een lijst met 10 mogelijke data:

september	20	21	24
oktober	22	23	
november	19	21	
december	19	20	22

Daarna vertelt ze aan Amir in welke maand ze jarig is en aan Bob op welke dag van de maand ze jarig is. Amir zegt vervolgens: “Ik weet niet wanneer Carina jarig is, maar ik weet zeker dat Bob het op dit moment ook niet weet.”

Bob reageert hierop: “Eerst wist ik inderdaad niet wanneer Carina jarig is, maar dankzij Amirs opmerking weet ik het nu wel”, waarop Amir concludeert: “Oh, maar dan weet ik het nu ook!”

Deze lastige puzzel is op te lossen met behulp van logisch redeneren. We spreken daarvoor de volgende notaties af:

- $A(\text{oktober})$ betekent ‘Carina heeft tegen Amir gezegd dat ze in de maand oktober jarig is’.
- $B(22)$ betekent: ‘Carina heeft tegen Bob gezegd dat ze op de 22e jarig is’.
- $C(20 \text{ december})$ betekent ‘Carina is jarig op 20 december’.

Voor andere dagen en maanden gelden dan vergelijkbare notaties.

In deze notatie kun je bijvoorbeeld schrijven:

$$C(20 \text{ september}) \Rightarrow \left(A(\text{september}) \wedge B(20)\right)$$

2p **13** Vertaal bovenstaande logische uitdrukking in een gewone zin.

Vanzelfsprekend kan Amir nooit weten wanneer Carina jarig is. Voor iedere maand zijn immers meerdere dagen mogelijk. Voor Bob ligt dat anders, maar toch zegt Amir zeker te weten dat Bob ook niet weet wanneer Carina jarig is.

Hieruit kun je concluderen dat Carina in november of december jarig is.

3p **14** Leg uit hoe je tot deze conclusie komt.

Bob weet dus in eerste instantie niet wanneer Carina jarig is. Je kunt alle mogelijkheden die er voor hem zijn, weergeven in de afgesproken notatie. Omdat inmiddels bekend is dat Carina in november of december jarig is, kunnen we ons beperken tot de dagen die in november en december vóórkomen. Het lijstje met data ziet er nu dus als volgt uit:

november	19	21	
december	19	20	22

Voor elk van de dagen 19, 20, 21 en 22 kan, uitgaande van wat Carina tegen Bob gezegd kan hebben, een logische uitdrukking gemaakt worden.

Door deze vier logische uitdrukkingen te combineren met het gegeven dat Carina in november of december jarig is én het feit dat Bob haar verjaardag weet dankzij dit gegeven, kun je concluderen dat Carina **niet** op de 19e jarig is.

Eén van die logische uitdrukkingen is: $B(20) \Rightarrow C(20 \text{ december})$

4p **15** Schrijf voor de andere drie dagen die vóórkomen in de maanden november en december ook zo'n logische uitdrukking op **en** leg uit hoe je aan de conclusie komt dat Carina niet op de 19e jarig is.

We weten dus nu twee dingen:
1 Carina is in november of in december jarig;
2 Carina is niet op de 19e jarig.

Blijkbaar is dit genoeg informatie voor Amir om erachter te komen wanneer Carina jarig is.

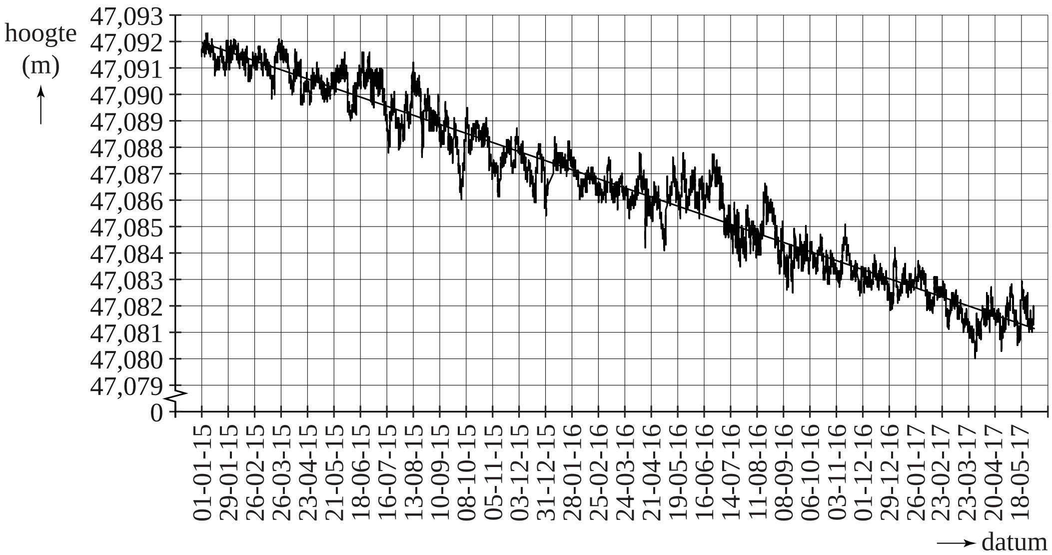
3p **16** Wanneer is Carina jarig? Licht je antwoord toe met een redenering.

Bodemdaling

Bodemdaling kan ontstaan door natuurlijke processen maar ook door menselijk handelen. Bij de gaswinning uit het Groningen-gasveld is er sprake van bodemdaling veroorzaakt door menselijk handelen. In deze opgave gaan we uit van de gegevens zoals die tot en met 2017 bekend waren. We nemen verder aan dat ontwikkelingen die tot op dat moment geconstateerd zijn, zich in de periode daarna op dezelfde wijze voortzetten.

Metingen van deze bodemdaling worden onder andere gedaan door zogeheten GPS-monitoring-stations, die zeer nauwkeurig posities bepalen. Een van deze stations staat boven op een gebouw bij het Eemskanaal. Elk uur wordt de hoogte van de GPS-antenne (ten opzichte van zeeniveau) van dit station gemeten.
In figuur 1 zijn alle metingen vanaf 1 januari 2015 om 0:00 uur tot en met 31 mei 2017 om 23:00 uur weergegeven. Deze figuur is vergroot op de uitwerkbijlage afgebeeld.

figuur 1



Het jaar 2016 was een schrikkeljaar.

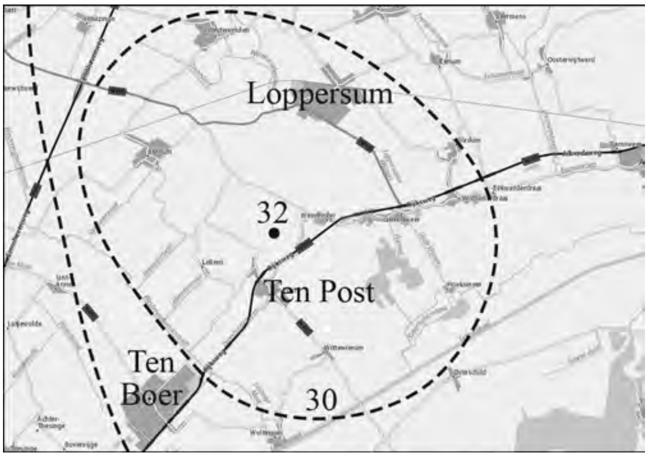
2p **17** Bereken om hoeveel metingen het in figuur 1 gaat.

In figuur 1 is ook de trendlijn van de hoogte van de GPS-antenne weergegeven. Zoals je kunt zien, is de eenheid op de horizontale as vier weken.
Als de bodemdaling onveranderd doorgaat, zal de hoogte van de GPS-antenne in de toekomst lager dan 47 meter zijn.

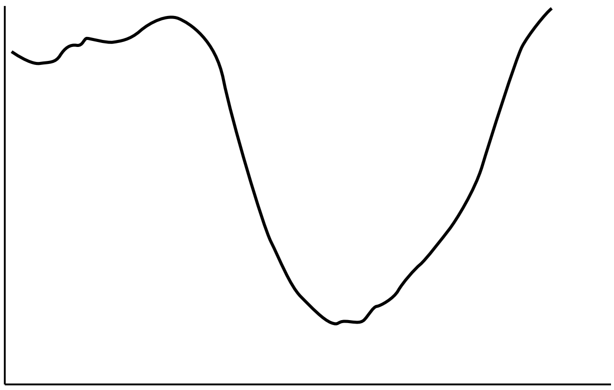
5p **18** Bereken in welk jaar dat volgens de gegeven trendlijn voor het eerst zal zijn. Gebruik daarbij de figuur op de uitwerkbijlage.

Het gebied waar sprake is van bodemdaling wordt het **dalingsgebied** genoemd. In het midden van het dalingsgebied, nabij Ten Post, is de bodemdaling het grootst. Tot 2013 was de bodem daar al 32 centimeter gedaald. De bodemdaling is niet overal even groot. Het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald, is bij benadering cirkelvormig. Zie figuur 2. In figuur 3 is bovendien de dwarsdoorsnede van de bodem door het laagste punt geschetst. Rondom het laagste punt heeft deze dwarsdoorsnede bij benadering de vorm van de grafiek van een kwadratisch verband, met andere woorden de vorm van een **parabool**.

figuur 2 bodemdaling in cm



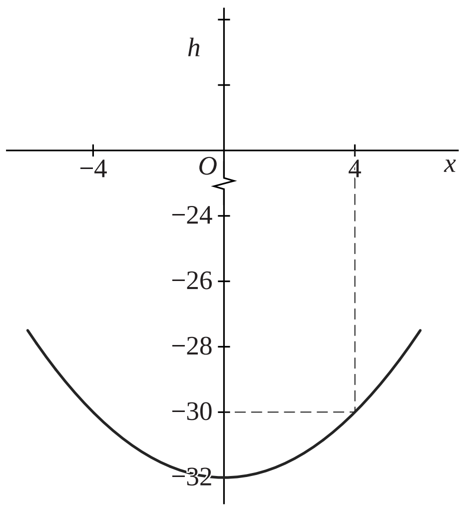
figuur 3 dwarsdoorsnede bodem



We nemen nu aan dat het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald cirkelvormig is. Verder nemen we aan dat de dwarsdoorsnede van de bodem rondom het midden van het dalingsgebied de vorm van een parabool heeft. De top van deze parabool komt overeen met het laagste punt van het dalingsgebied.

In 2013 was de straal van het cirkelvormige gebied gelijk aan 4 km en in het laagste punt was de bodem dus 32 centimeter gedaald. In figuur 4 is de parabool geschetst bij het model van de dwarsdoorsnede dat bij deze gegevens hoort.

figuur 4



De parabool bij het model voor 2013 kan beschreven worden met een formule van de vorm $h = ax^2 + b$. Hierin is x de afstand tot het midden van het dalingsgebied in kilometers en h is de daling van de bodem in centimeters.

4p **19** Bepaal de niet-afgeronde waarden van a en b.

Rondom Ten Post blijft de bodem dalen. Daardoor wordt het dalingsgebied ook groter. Men voorspelt dat het gebied rondom Ten Post tot 2080 flink zal blijven dalen. Ook voor 2080 nemen we aan dat het gebied waar de bodem ten minste 30 centimeter is gedaald bij benadering cirkelvormig is. We nemen ook weer aan dat de dwarsdoorsnede van de bodem rondom het midden van het dalingsgebied de vorm van een parabool heeft waarvan de top overeenkomt met het laagste punt van het dalingsgebied.
Voor 2080 wordt de parabool beschreven door de formule $h = 0,084x^2 - 47$. Hierin is x weer de afstand tot het midden van het dalingsgebied in kilometers en h is weer de daling van de bodem in centimeters.

Volgens de voorspellingen zal de oppervlakte van het gebied met een daling van ten minste 30 cm in 2080 een stuk groter zijn dan in 2013.

5p **20** Bereken hoeveel keer zo groot. Geef je antwoord als geheel getal.

Als gevolg van de bodemdaling vinden er in Groningen en omgeving aardbevingen plaats. In de tabel zie je hoe snel de aardbevingen elkaar in het jaar 1993 opvolgden.

tabel

aardbevingen in 1993 (chronologisch)																
aantal dagen sinds de vorige beving	63	21	7	14	40	9	44	0	13	17	27	12	18	3	59	29

Voorbeeld: de 0 in de tabel geeft aan dat de 7e en 8e aardbeving in 1993 op dezelfde dag plaatsvonden.

Op basis van de tabel en de afzonderlijke lengtes van de kalendermaanden kunnen de volgende conclusies worden getrokken:
- De tweede en vierde aardbeving in 1993 kunnen in één kalendermaand plaatsgevonden hebben.
- De eerste aardbeving in 1993 werd voorafgegaan door minstens één aardbevingsvrije kalendermaand.

4p **21** Geef voor beide conclusies een sluitende redenering.

uitwerkbijlage

18