

Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van (waarde)punten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:

- per artikel zijn je eerste 100 punten €1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- daarna zijn per artikel iedere 100 punten €0,50 waard;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

Voorbeeld

Kop en schotel van hiernaast kosten samen €5,-. Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor €5,- of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog €2,- bijbetalen.

foto



Bij DE kost een gebaksbordje €9,30 en een taartplateau €46,50.

Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk bijbetalen.

4p **9** Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Op de website staat ook een puntencalculator. Deze calculator geeft per artikel aan hoeveel euro's je punten waard zijn. Je moet dan wel minstens 100 punten hebben.

Je tikt het aantal punten in en op het scherm verschijnt de bijbehorende waarde in euro's voor één artikel. De calculator maakt gebruik van de volgende lineaire formule:

$$W = 1 + 0,005p$$

In deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

4p **10** Leid deze formule af uit bovenstaande voorwaarden.

Er zijn ook andere spaarsystemen te bedenken, bijvoorbeeld een systeem waarbij klanten die veel punten sparen daarvoor iets meer beloofd worden. Zo bedenkt Alwin, een wiskunde C-leerling uit 6V, een ander systeem. Zie de tabel.

tabel

aantal punten	100	1100	2100	3100	5100	7100	9100
waarde in euro's	1,50	2,14	3,06	4,37	8,90	18,15	37,01

Je kunt in de tabel zien dat er geen lineair verband is tussen het aantal punten en de waarde in euro's.

Verder gelden ook bij het systeem van Alwin vergelijkbare voorwaarden als bij het officiële DE-systeem:

- per artikel zijn je eerste 100 punten €1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
- betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

In het systeem van Alwin is er sprake van een (bij benadering) exponentieel verband.

- 4p **11** Laat voor alle waarden in de tabel zien dat er inderdaad (bij benadering) sprake is van een exponentieel verband en bereken de groeifactor per 1000 punten in drie decimalen nauwkeurig.

Ook bij spaarsystemen waarin sprake is van een exponentieel verband kunnen we een puntencalculator maken, bijvoorbeeld een calculator waar de volgende formule bij hoort:

$$W = 1,5 \cdot 1,00035626^{p-100}$$

Ook in deze formule is p het aantal punten (met $p \geq 100$) en W de waarde in euro's.

Zo'n exponentieel systeem zou voor DE erg duur kunnen worden. Om dit te voorkomen, bedenkt Alwin dat men de bovenstaande exponentiële formule alleen toe moet passen tot het aantal punten waarbij de waarde **twee keer zo groot** is als bij de lineaire formule uit het begin van deze opgave. Alwin stelt verder voor om vanaf dat puntenaantal weer voor iedere 100 punten €0,50 te geven. Dus vanaf dat puntenaantal moet er weer een lineaire formule gebruikt worden. Je kunt berekenen dat tot en met 12578 punten de exponentiële formule gebruikt moet worden en voor grotere puntenaantallen een lineaire formule.

Nog los van het feit dat Alwins voorstel behoorlijk ingewikkeld is, heeft dit voorstel ook rare gevolgen.

Stel je namelijk eens voor dat iemand twee keer zoveel punten gespaard heeft als de genoemde 12578 punten.

Die persoon kan dan besluiten die 25156 punten in één keer te gebruiken. Hij kan echter ook besluiten zijn punten in twee even grote delen op te delen en die twee delen stuk voor stuk te gebruiken. Het verschil in waarde tussen beide opties is fors.

- 4p **12** Welk van beide opties levert de spaarder het meeste op? Licht je antwoord toe.