

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Rakende grafieken?

1 maximumscore 5

- Er moet gelden $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$ 1
- $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g'(x) = \frac{1}{e} \cdot x$ 1
- Uit $f'(x) = g'(x)$ volgt $x = \sqrt{e}$ ($x = -\sqrt{e}$ voldoet niet) 1
- $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ en $g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ 1
- ($f(\sqrt{e}) = g(\sqrt{e})$ en $f'(\sqrt{e}) = g'(\sqrt{e})$, dus) de grafieken van f en g raken elkaar 1

Bewegen over een lijn

2 maximumscore 4

- $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ -\frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$ 1
- \overrightarrow{PQ} (of $\overrightarrow{OP'}$) = $\begin{pmatrix} -(-\frac{1}{2}p + 3) \\ p \end{pmatrix}$ (= $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - 3 \\ p \end{pmatrix}$) 1
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2}p - 3 \\ \frac{1}{2}p + 3 \end{pmatrix}$ 1
- Het stelsel $\begin{cases} x = 1\frac{1}{2}p - 3 \\ y = \frac{1}{2}p + 3 \end{cases}$ geeft voor m de vergelijking $y = \frac{1}{3}x + 4$ 1

of

- De punten $P_1(0, 3)$ en $P_2(6, 0)$ liggen op k 1
- Dit geeft $P_1'(-3, 0)$ en $P_2'(0, 6)$ 1
- Dit geeft $Q_1(-3, 3)$ en $Q_2(6, 6)$ 1
- Hieruit volgt voor m de vergelijking $y = \frac{1}{3}x + 4$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een derde cirkel

3 maximumscore 4

- In driehoek $M_1M_2M_3$ geldt

$$(r+2)^2 = 8^2 + (r+6)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (r+6) \cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$$
 1
- $$\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{(r+2)^2 - 8^2 - (r+6)^2}{-2 \cdot 8 \cdot (r+6)}$$
 1
- De teller herleiden tot $-8r - 96$ 1
- De rest van de herleiding tot $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{r+12}{2r+12}$ 1

4 maximumscore 3

- $\left(\frac{r+12}{2r+12} = \frac{1+\frac{12}{r}}{2+\frac{12}{r}}, \text{ dus } \frac{r+12}{2r+12} \text{ nadert tot } \frac{1}{2}\right)$ 2
 - $(\cos(\angle M_1M_2M_3) \text{ nadert tot } \frac{1}{2},)$ dus de limiet is 60° 1
- of
- (de termen 12 in teller en noemer zijn voor grote waarden van r verwaarloosbaar, dus) $\frac{r+12}{2r+12}$ nadert tot $\frac{1}{2}$ 2
 - $(\cos(\angle M_1M_2M_3) \text{ nadert tot } \frac{1}{2},)$ dus de limiet is 60° 1
- of
- Als r onbegrensd toeneemt, nadert c_3 tot een gemeenschappelijke raaklijn aan c_1 en c_2 1
 - Een redenering of berekening waaruit volgt dat deze raaklijn de x -as in $(-6,0)$ snijdt, dus $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{2}{4}$ (of $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{6}{12}$) 1
 - $(\cos(\angle M_1M_2M_3) \text{ nadert tot } \frac{1}{2},)$ dus de limiet is 60° 1

Vraag	Antwoord	Scores
5	maximumscore 6	
	<ul style="list-style-type: none"> De stelling van Pythagoras in driehoek M_1PM_3 geeft $(r+2)^2 = r^2 + (-2-a)^2$, met a de x-coördinaat van M_3 	1
	<ul style="list-style-type: none"> De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft $(r+6)^2 = r^2 + (6-a)^2$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dit geeft $4r = a^2 + 4a$ en $12r = a^2 - 12a$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $3(a^2 + 4a) = a^2 - 12a$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dus $2a^2 + 24a = 0$, dus $a(a+12) = 0$, dus $a = -12$ ($a = 0$ voldoet niet) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Invullen in een eerder gevonden vergelijking met r en a geeft $r = 24$ 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> $\cos(\angle PM_2M_3) = \cos(\angle M_1M_2M_3)$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $\frac{M_2P}{r+6} = \frac{r+12}{2r+12}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dit geeft $M_2P = \frac{1}{2}r + 6$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft $(\frac{1}{2}r+6)^2 + r^2 = (r+6)^2$ (of in driehoek M_1PM_3: $(\frac{1}{2}r-2)^2 + r^2 = (r+2)^2$) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft $r^2 + M_2P^2 = (r+6)^2$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $M_2P = \sqrt{12r+36}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \cos(\angle PM_2M_3)$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $\frac{r+12}{2r+12} = \frac{\sqrt{12r+36}}{r+6}$, dus $2\sqrt{12r+36} = r+12$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> De stelling van Pythagoras in driehoek M_1PM_3 geeft $(r+2)^2 = r^2 + PM_1^2$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $PM_1 = \sqrt{4r+4}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Invullen in $(r+6)^2 = r^2 + (PM_1+8)^2$ geeft $(r+6)^2 = r^2 + (\sqrt{4r+4}+8)^2$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $12r+36 = 4r+68+16\sqrt{4r+4}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) 	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een achtbaan

6 maximumscore 5

- De afgeleide van $\sin(2t)$ is $2\cos(2t)$ 1
- $x'(t) = -\sin(t) + 2\cos(2t)$ en $y'(t) = -2\sin(t)$ 1
- Voor de snelheid v op tijdstip t geldt

$$v(t) = \sqrt{(-\sin(t) + 2\cos(2t))^2 + (-2\sin(t))^2}$$
 1
- Beschrijven hoe het maximum van v kan worden bepaald 1*
- De maximale snelheid is 3,6 (m/s) 1*

* deze punten altijd toekennen

7 maximumscore 5

- $2\cos(t) = \cos(t) + \sin(2t)$ geeft $2\cos(t) = \cos(t) + 2\sin(t)\cos(t)$ 1
- $\cos(t) - 2\sin(t)\cos(t) = 0$ 1
- $\cos(t)(1 - 2\sin(t)) = 0$, dus $\sin(t) = \frac{1}{2}$ ($\cos(t) = 0$ voldoet niet, want dat geeft O) 1
- Dit geeft $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ 1
- De beweging duurt $\frac{2}{3}\pi$ (s) 1

of

- $2\cos(t) = \cos(t) + \sin(2t)$ geeft $\sin(2t) = \cos(t)$, dus $\sin(2t) = \sin(\frac{1}{2}\pi - t)$ 1
- $2t = \frac{1}{2}\pi - t + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) of $2t = \pi - (\frac{1}{2}\pi - t) + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ (met k geheel) of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Dit geeft $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = \frac{5}{6}\pi$ (want $t = 1\frac{1}{2}\pi$ en $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ geven O) 1
- De beweging duurt $\frac{2}{3}\pi$ (s) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

8 maximumscore 4

- De helling van lijnstuk PQ op tijdstip t is gelijk aan $\frac{2 \cos(t + \pi) - 2 \cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) - (\cos(t) + \sin(2t))}$ 1
- $\sin(2(t + \pi)) = \sin(2t + 2\pi) = \sin(2t)$ 1
- De helling is gelijk aan $\frac{2 \cos(t + \pi) - 2 \cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2t) - \cos(t) - \sin(2t)} = \frac{2 \cos(t + \pi) - 2 \cos(t)}{\cos(t + \pi) - \cos(t)}$ 1
- Dit is (voor elke waarde van t met $\cos(t) \neq 0$) gelijk aan $(\frac{2(\cos(t + \pi) - \cos(t))}{\cos(t + \pi) - \cos(t)} =) 2$ (en dus onafhankelijk van t) 1

of

- De helling van lijnstuk PQ op tijdstip t is gelijk aan $\frac{2 \cos(t + \pi) - 2 \cos(t)}{\cos(t + \pi) + \sin(2(t + \pi)) - (\cos(t) + \sin(2t))}$ 1
- $\sin(2(t + \pi)) = \sin(2t + 2\pi) = \sin(2t)$ 1
- $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$, dus de helling is gelijk aan $\frac{-2 \cos(t) - 2 \cos(t)}{-\cos(t) + \sin(2t) - \cos(t) - \sin(2t)} = \frac{-2 \cos(t) - 2 \cos(t)}{-\cos(t) - \cos(t)}$ 1
- Dit is (voor elke waarde van t met $\cos(t) \neq 0$) gelijk aan $(\frac{-4 \cos(t)}{-2 \cos(t)} =) 2$ (en dus onafhankelijk van t) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een gebroken functie

9 maximumscore 4

- De vergelijking $\frac{5}{4x-6} = x - 3\frac{1}{2}$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $x^2 - 5x + 4 = 0$ 1
- Herleiden tot $(x-1)(x-4) = 0$ geeft $x = 1$ of $x = 4$ 1
- De coördinaten van punt B zijn $(4, \frac{1}{2})$ 1

10 maximumscore 5

- De inhoud van het linkerdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 dx$ 1
- De inhoud van het rechterdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_1^{3\frac{1}{2}} \left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2 dx$ 1
- Een primitieve van $\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2$ is $\frac{-25}{4(4x-6)}$ 1
- Een primitieve van $\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^2$ is $\frac{1}{3}\left(x - 3\frac{1}{2}\right)^3$ 1
- De inhoud is $(2\frac{1}{12}\pi + 5\frac{5}{24}\pi) = 7\frac{7}{24}\pi$ 1

of

- De inhoud van het linkerdeel is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{5}{4x-6}\right)^2 dx$ 1
- Een primitieve van $\left(\frac{5}{4x-6}\right)^2$ is $\frac{-25}{4(4x-6)}$ 1
- De inhoud van het rechterdeel is gelijk aan de inhoud van de kegel die ontstaat door lijn k van $x = 1$ tot $x = 3\frac{1}{2}$ om de x -as te wentelen 1
- De hoogte van de kegel is $2\frac{1}{2}$, de straal van het grondvlak G is $(|-2\frac{1}{2}|) = 2\frac{1}{2}$, de inhoud van de kegel is te berekenen met $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ 1
- De inhoud is $(2\frac{1}{12}\pi + 5\frac{5}{24}\pi) = 7\frac{7}{24}\pi$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

11 maximumscore 4

- Er geldt $g(x) = \frac{5}{4x-6} + a$ en de grafiek van g heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x = 1\frac{1}{2}$ 1
- De horizontale asymptoot van de grafiek van g heeft vergelijking $y = a$ 1
- De verticale asymptoot van de grafiek van de inverse functie van g (ontstaan door spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$) is dus de lijn met vergelijking $x = a$ 1
- $(|a - 1\frac{1}{2}| = 4, \text{ dus}) a = -2\frac{1}{2}$ of $a = 5\frac{1}{2}$ 1

of

- Er geldt $g(x) = \frac{5}{4x-6} + a$ en de grafiek van g heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x = 1\frac{1}{2}$ 1
- Voor de grafiek van de inverse functie van g geldt $y = \frac{5}{4(x-a)} + 1\frac{1}{2}$ 1
- De verticale asymptoot van de grafiek van de inverse functie van g heeft vergelijking $x = a$ 1
- $(|a - 1\frac{1}{2}| = 4, \text{ dus}) a = -2\frac{1}{2}$ of $a = 5\frac{1}{2}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Brandwerendheid van een deur

12 maximumscore 5

- $T'_{\text{nat}}(t) = 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} \cdot \left(\frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t} \right)$ 2

- $T'_{\text{nat}}(t) = 0$ geeft $\frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t} = 0$ 1

- Dit geeft $\ln(t) = 3$ 1

- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot e^0 = 1070$ (°C) 1

of

- De herleiding tot $20 + 1050 \cdot e^{-(\ln(t)-3)^2}$ 2

- Dit is maximaal als $-(\ln(t)-3)^2$ maximaal is 1

- Dat is het geval als $\ln(t) = 3$ 1

- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot e^0 = 1070$ (°C) 1

of

- T_{nat} is maximaal als $-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9$ maximaal is 2

- $\frac{d}{dt}(-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9) = \frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t}$ 1

- $\frac{-2\ln(t)}{t} + \frac{6}{t} = 0$ geeft $\ln(t) = 3$ 1

- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot e^0 = 1070$ (°C) 1

Opmerking

Als in het eerste antwoordalternatief voor $T'_{\text{nat}}(t)$ de uitdrukking

$1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} \cdot \left(-2\ln(t) + \frac{6}{t} \right)$ wordt gegeven, dan één van de twee

scorepunten voor de afgeleide functie toekennen.

13 maximumscore 4

- De vergelijking $20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300$ moet worden opgelost 1

- $\log(8t + 1) = \frac{280}{345}$ (of 0,8116) 1

- $8t + 1 = 10^{\frac{280}{345}}$ (of 6,4803) 1

- Het antwoord: $t \approx 0,685$ (minuten) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

14 maximumscore 7

- De oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3 is

$$\int_{0,69}^{30} (20 + 345 \cdot \log(8t + 1) - 300) dt$$
 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 11 929 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $T_{\text{nat}}(t) = 300$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $t \approx 6,36$ (of nauwkeuriger) 1
- De oppervlakte bij de natuurlijke brand is

$$\int_{6,36}^{30} (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9} - 300) dt$$
 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 14 242 1
- (14 242 > 11 929, dus) de deur houdt tijdens de natuurlijke brand niet minstens 30 minuten stand 1

of

- De oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3 is

$$\int_{0,69}^{30} (20 + 345 \cdot \log(8t + 1) - 300) dt$$
 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 11 929 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $T_{\text{nat}}(t) = 300$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $t \approx 6,36$ (of nauwkeuriger) 1
- Beschrijven hoe de vergelijking

$$\int_{6,36}^x (20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9} - 300) dt = 11\,929$$
 kan worden opgelost 1
- Dit geeft $x \approx 26$ 1
- (26 < 30, dus) de deur houdt tijdens de natuurlijke brand niet minstens 30 minuten stand 1

Opmerkingen

- *In plaats van de ondergrens 0,69 van de eerste integraal mag ook de nauwkeuriger waarde gebruikt worden die in de vorige vraag is berekend.*
- *Als in één of beide integralen de term 300 is vergeten, voor deze vraag maximaal 6 scorepunten toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Perforatie

15 maximumscore 6

- $(x^2 + 1)(x - 2) = 0$ geeft $x = 2$ (want $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossing) 1
- $x = 2$ invullen in $px^2 + 4px + 6$ geeft $4p + 8p + 6 (=12p + 6)$ 1
- $12p + 6 = 0$ geeft $p = -\frac{1}{2}$ (dus voor $p = -\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van f_p een perforatie) 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$ 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x \neq 2$) 1
- De coördinaten van de perforatie zijn $(2, -\frac{4}{5})$ (want $\lim_{x \rightarrow 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{5}$) 1

of

- Herleiden van de teller tot $(x-2)(px+6p)+12p+6$ 2
- $12p + 6 = 0$ geeft $p = -\frac{1}{2}$ (dus voor $p = -\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van f_p een perforatie) 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$ 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x \neq 2$) 1
- De coördinaten van de perforatie zijn $(2, -\frac{4}{5})$ (want $\lim_{x \rightarrow 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{5}$) 1

of

- $px^2 + 4px + 6 = 0$ geeft $x = \frac{-4p \pm \sqrt{16p^2 - 24p}}{2p}$ 1
- $(x^2 + 1)(x - 2) = 0$ geeft $x = 2$ (want $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossing) (dus er is een perforatie bij $x = 2$), dus er moet gelden $\frac{-4p \pm \sqrt{16p^2 - 24p}}{2p} = 2$ 1
- Dit geeft $p = -\frac{1}{2}$ 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(x-2)(-\frac{1}{2}x-3)}{(x^2+1)(x-2)}$ 1
- $f_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{-\frac{1}{2}x-3}{x^2+1}$ (voor $x \neq 2$) 1
- De coördinaten van de perforatie zijn $(2, -\frac{4}{5})$ (want $\lim_{x \rightarrow 2} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{5}$) 1