Vraag	Antwoord	Scores

De derde macht

1 maximumscore 3

- Er moet dan gelden $f(g(x)) = x$ (of $g(f(x)) = x$) 1
- $f(g(x)) = \left(\sqrt[3]{x+1} - 1 + 1\right)^3 - 1 = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1$ 1
- $f(g(x)) = x + 1 - 1 = x$ (dus g is de inverse functie van f) 1

of

- Spiegeling van het punt (x, y) op de grafiek van f geeft $x = (y+1)^3 - 1$ 1
- Dit geeft $x + 1 = (y+1)^3$, dus $\sqrt[3]{x+1} = y + 1$ 1
- Dus $y = \sqrt[3]{x+1} - 1$, dus (y, x) ligt op de grafiek van g (dus g is de inverse functie van f) 1

2 maximumscore 6

- Opgelost moet worden $(x+1)^3 - 1 = \sqrt[3]{x+1} - 1$, dus $(x+1)^3 = \sqrt[3]{x+1}$ 1
- Hieruit volgt $(x+1)^9 = x + 1$ (of $x + 1 = \sqrt[9]{x+1}$) 1
- Hieruit volgt $(x+1)((x+1)^8 - 1) = 0$ 1
- Dus $x + 1 = 0$ of $(x+1)^8 = 1$ 1
- Dit geeft $x = -2$, $x = -1$ of $x = 0$ 1
- De gemeenschappelijke punten zijn $(-2, -2)$, $(-1, -1)$ en $(0, 0)$ 1

of

- De gemeenschappelijke punten liggen op de lijn $y = x$ 1
- Uit $f(x) = x$ volgt $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ 1
- Hieruit volgt $x(x^2 + 3x + 2) = 0$ 1
- Dus $x(x+1)(x+2) = 0$ 1
- Dit geeft $x = -2$, $x = -1$ of $x = 0$ 1
- De gemeenschappelijke punten zijn $(-2, -2)$, $(-1, -1)$ en $(0, 0)$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- De gemeenschappelijke punten liggen op de lijn $y = x$ — 1
- Uit $f(x) = x$ volgt $(x+1)^3 = x+1$ — 1
- Hieruit volgt $(x+1)((x+1)^2 - 1) = 0$ — 1
- Dus $x+1 = 0$ of $(x+1)^2 = 1$ — 1
- Dit geeft $x = -2$, $x = -1$ of $x = 0$ — 1
- De gemeenschappelijke punten zijn $(-2, -2)$, $(-1, -1)$ en $(0, 0)$ — 1

Opmerking
Als één van de drie oplossingen van de op te lossen vergelijking ontbreekt, voor deze vraag maximaal 4 scorepunten toekennen. Als twee oplossingen ontbreken, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

Spots

3 maximumscore 4

- $r^2 = x^2 + d^2$ (en dus $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{1}{x^2+d^2}$) — 1
- $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ — 1
- $\dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$ — 1
- $E = \dfrac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \dfrac{1}{x^2+d^2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \dfrac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \dfrac{x}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ — 1

4 maximumscore 7

- $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \dfrac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \dfrac{1 \cdot \left(x^2+100\right)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(x^2+100\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{\left(\left(x^2+100\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2}$ — 2
- $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0$ geeft $\left(x^2+100\right)^{\frac{3}{2}} - 3x^2\left(x^2+100\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ — 1
- $\left(x^2+100\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+100-3x^2\right) = 0$ — 1
- $x^2+100-3x^2 = 0$ (omdat $\left(x^2+100\right)^{\frac{1}{2}} \neq 0$) — 1
- $x^2 = 50$ dus (omdat $x > 0$) $x = \sqrt{50}$ — 1
- Het antwoord: 7,1 (mm) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

5 **maximumscore 6**

- De horizontale afstand (in mm) van de rechterspot tot P is $40-d$ 1
- De totale verlichtingssterkte in P is
  $$\frac{500}{4\pi}\cdot\frac{25}{\left(25^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{500}{4\pi}\cdot\frac{25}{\left(25^2+(40-d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$ 2
- Beschrijven hoe het maximum 0,074 (of nauwkeuriger) gevonden kan worden 1
- Beschrijven hoe het minimum 0,061 (of nauwkeuriger) gevonden kan worden 1
- Het minimum is 82% (of nauwkeuriger) (of: 80% van het maximum is 0,059), dus het deel van het werkoppervlak tussen de spots wordt voldoende gelijkmatig belicht 1

Opmerkingen

– *De factor* $\frac{500}{4\pi}$ *mag, mits toegelicht, in de berekening buiten beschouwing worden gelaten.*

– *Als wordt aangenomen dat* $E_{\text{totaal}}=2E$, *voor deze vraag geen scorepunten toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores

Twee snijdende cirkels

6 maximumscore 4

- (Pythagoras in driehoek NDA geeft) $AD^2 + DN^2 = r^2$ — 1
- (Pythagoras in driehoek MDA geeft) $AD^2 + (DN - 1)^2 = 1^2$ — 1
- Samen geeft dit $1 - (DN - 1)^2 = r^2 - DN^2$ — 1
- Herleiden tot $DN = \frac{1}{2}r^2$ — 1

7 maximumscore 4

- $DM = DN - 1 = \frac{1}{2}r^2 - 1$ — 1
- $CD = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}(r - 1)$ — 1
- $CD = DM$ geeft $r^2 - r - 1 = 0$ — 1
- Exact oplossen geeft $r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) ($r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ voldoet niet) — 1

of

- $DM = DN - 1 = \frac{1}{2}r^2 - 1$ — 1
- $CD = CN - DM - MN = r - \left(\frac{1}{2}r^2 - 1\right) - 1 = r - \frac{1}{2}r^2$ — 1
- $CD = DM$ geeft $r^2 - r - 1 = 0$ — 1
- Exact oplossen geeft $r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) ($r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ voldoet niet) — 1

of

- $DM + 1 = DN$, dus $DM = \frac{1}{2}r^2 - 1$ — 1
- $CD + DM + 1 = CN$, dus $2DM + 1 = r$ — 1
- Samen geeft dit $r^2 - r - 1 = 0$ — 1
- Exact oplossen geeft $r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) ($r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ voldoet niet) — 1

of

- Een redenering waaruit volgt $\Delta NCA \sim \Delta AMC$ — 1
- Hieruit volgt $\dfrac{AC}{CM} = \dfrac{AN}{AC}$ dus $\dfrac{1}{r - 1} = \dfrac{r}{1}$ — 1
- Dit geeft $r^2 - r - 1 = 0$ — 1
- Exact oplossen geeft $r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) ($r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ voldoet niet) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Sinusoïde met perforaties

8 maximumscore 5

- De noemer is nul als $\cos(x)=0$, dus als $x=\frac{1}{2}\pi$ of $x=1\frac{1}{2}\pi$ 1
- $f(x)=\dfrac{1+2\cos^2(x)-1}{\cos(x)}+1$ 1
- Dit is gelijk aan $2\cos(x)+1$ (voor $x\neq\frac{1}{2}\pi$, $x\neq1\frac{1}{2}\pi$) 1
- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi} 2\cos(x)+1=1$ en $\lim\limits_{x\to1\frac{1}{2}\pi} 2\cos(x)+1=1$ (of: als x nadert tot $\frac{1}{2}\pi$ of tot $1\frac{1}{2}\pi$, dan nadert $f(x)$ tot 1) 1
- Dus de coördinaten van de perforaties zijn $\left(\frac{1}{2}\pi,1\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi,1\right)$ 1

Opmerking
Als het stelsel $\{1+\cos(2x)=0,\ \cos(x)=0\}$ *opgelost wordt, resulterend in* $x=\frac{1}{2}\pi, x=1\frac{1}{2}\pi$, *zonder daarna op exacte wijze tot* $y=1$ *te komen, hiervoor hoogstens 2 scorepunten toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores

Getransformeerde grafiek

9 maximumscore 3

- $AP = \ln\left(p^2+1\right)-1$ en $BP = 1-\ln\left(\dfrac{e^2}{p^2+1}\right)$ — 1
- $BP = 1-\left(\ln\left(e^2\right)-\ln\left(p^2+1\right)\right)$ — 1
- $BP = 1-2+\ln\left(p^2+1\right) = \ln\left(p^2+1\right)-1$ $(= AP)$ — 1

of

- De y-coördinaat van het midden van lijnstuk AB is $\dfrac{f(p)+g(p)}{2}$ — 1
- $\dfrac{f(p)+g(p)}{2} = \dfrac{\ln\left(p^2+1\right)+\ln\left(\dfrac{e^2}{p^2+1}\right)}{2} = \dfrac{\ln\left(p^2+1\right)+2-\ln\left(p^2+1\right)}{2}$ (of $\dfrac{\ln\left(e^2\right)}{2}$) — 1
- $\dfrac{f(p)+g(p)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$, dus het midden van lijnstuk AB is P, dus $AP = BP$ — 1

10 maximumscore 5

- (Vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking $y=1$ geldt) de inhoud is gelijk aan $2\cdot\pi\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}y$, met $y=\ln\left(x^2+1\right)$ — 2
- $y=\ln\left(x^2+1\right)$ herleiden tot $x^2 = e^y-1$ — 1
- Een primitieve van e^y-1 is e^y-y — 1
- De inhoud is $2\pi(e-2)$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

11 maximumscore 8

- Een vergelijking van de verschoven grafiek is $y = \ln\left((x-2)^2+1\right)$ 1
- Voor de x-coördinaat van het snijpunt geldt $x^2+1=(x-2)^2+1$ 1
- Hieruit volgt $x=1$ 1
- $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt is $f'(1)=1$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de verschoven grafiek is $f'(-1)=-1$ (of $\dfrac{2(1-2)}{(1-2)^2+1}=-1$) 2
- Het product van de richtingscoëfficiënten is -1, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht 1

of

- Een vergelijking van de verschoven grafiek is $y = \ln\left((x-2)^2+1\right)$ 1
- Voor de x-coördinaat van het snijpunt geldt $x^2+1=(x-2)^2+1$ 1
- Hieruit volgt $x=1$ 1
- $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt is $f'(1)=1$ 1
- De afgeleide die hoort bij de verschoven grafiek is $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2(x-2)}{(x-2)^2+1}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de verschoven grafiek is ($\dfrac{2(1-2)}{(1-2)^2+1}=$) -1 1
- Het product van de richtingscoëfficiënten is -1, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- $f(-x)=\ln((-x)^2+1)=f(x)$ (voor elke waarde van x) 2
- Uit de verschuiving (en de symmetrie) volgt $x=1$ 1
- $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt is $f'(1)=1$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de verschoven grafiek is $f'(-1)=-1$ (of $\dfrac{2(1-2)}{(1-2)^2+1}=-1$) 2
- Het product van de richtingscoëfficiënten is -1, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht 1

Vraag	Antwoord	Scores

Drooglijgtijd

12 maximumscore 4

- De vergelijking $125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t\right)=40$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- $t_1 \approx 147,6$ en $t_2 \approx 597,4$ 1
- Het antwoord: 450 (minuten) 1

13 maximumscore 5

- Op $t=t_1$ is $h=z$, dus $z=125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t_1\right)$ 1
- Een redenering waaruit volgt dat $t_1=\frac{745}{2}-\frac{1}{2}D$ 2
- Substitutie van $t_1=\frac{745}{2}-\frac{1}{2}D$ in $z=125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t_1\right)$ geeft
  $z=125\cos\left(\frac{2\pi}{745}\left(\frac{745}{2}-\frac{1}{2}D\right)\right)$ 1
- Hieruit volgt $z=125\cos\left(\pi-\frac{\pi}{745}D\right)$ 1

14 maximumscore 5

- Voor de formule van de grafiek van figuur 2 geldt
  $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}D}=-125\sin\left(\pi-\frac{\pi}{745}D\right)\cdot-\frac{\pi}{745}$ 1
- $D=372,5$ geeft $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}D}=\frac{125\pi}{745}$ (of (ongeveer) 0,53) 1
- Dus de helling bij de grafiek van figuur 3 is $\frac{745}{125\pi}\approx 1,9$ 1
- Voor de formule van de grafiek van figuur 4 geldt
  $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}=2,4\cdot 10^{-4}z^2+1,7$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De helling bij de grafiek van figuur 4 voor $z=0$ is 1,7 1

Vraag	Antwoord	Scores

Punt bewegend over een lijn

15 maximumscore 5

- $AP^2 = (2+4t)^2 + (5t-1)^2$ 1
- $BP^2 = (4t-4)^2 + (5t+1)^2$ 1
- $AP^2 = BP^2$ herleiden tot een lineaire vergelijking 1
- Dit geeft $t = \frac{3}{7}$ 1
- Invullen in de vectorvoorstelling van k geeft $P\left(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7}\right)$ 1

of

- Een vergelijking van lijn k is $y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$ 1
- $AP^2 = x^2 + \left(1\frac{1}{4}x - 3\frac{1}{2}\right)^2$ en $BP^2 = (x-6)^2 + \left(1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}\right)^2$ 1
- $AP^2 = BP^2$ herleiden tot een lineaire vergelijking 1
- Dit geeft $x = 3\frac{5}{7}$ 1
- Invullen in de vergelijking van k geeft $y = 3\frac{1}{7}$ (dus $P\left(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7}\right)$) 1

of

- Een vergelijking van lijn k is $y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$ 1
- Een vergelijking van de middelloodlijn n van lijnstuk AB is van de vorm $6x - 2y + c = 0$ 1
- Het punt $(3,1)$ ligt op n; hieruit volgt voor n de vergelijking $y = 3x - 8$ 1
- $3x - 8 = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$ exact oplossen geeft $x = 3\frac{5}{7}$ 1
- Invullen in de vergelijking van k geeft $y = 3\frac{1}{7}$ (dus $P\left(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7}\right)$) 1

of

- Een vergelijking van lijn k is $y = 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$ 1
- Een richtingsvector van de middelloodlijn n van lijnstuk AB is $\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ 1
- Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ 1
- $1 + 6t = 1\frac{1}{4}(3+2t) - 1\frac{1}{2}$ exact oplossen geeft $t = \frac{5}{14}$; dit geeft $x = 3\frac{5}{7}$ 1
- $y = 3\frac{1}{7}$ (dus $P\left(3\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7}\right)$) 1

Vraag	Antwoord	Scores

16 **maximumscore 7**

- Er moet gelden $d(P, m) = d(P, y\text{-as})$ 1
- $d(P, y\text{-as})$ (of de straal) is gelijk aan $2+4t$ (of $|2+4t|$) 1
- Lijn m heeft vergelijking $x+3y=6$ 1
- $d(P,m) = \dfrac{|2+4t+3(1+5t)-6|}{\sqrt{1^2+3^2}}$ $\left(= \dfrac{|19t-1|}{\sqrt{10}}\right)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $d(P, m) = d(P, y\text{-as})$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $t \approx -0{,}17$ of $t \approx 1{,}15$ 1
- Invullen in $2+4t$ geeft stralen 1,33 en 6,61 1

Opmerking
Als door tussentijds afronden een afwijkend antwoord wordt gevonden, hiervoor 1 scorepunt in mindering brengen.