
Formules

Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

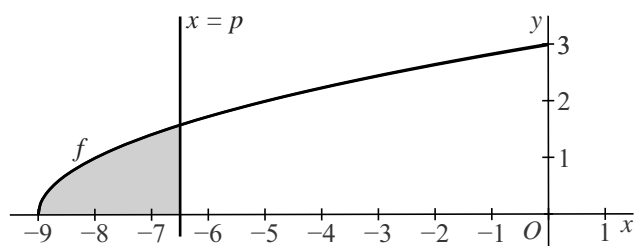
$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

Het achtste deel

Op het domein $[-9,0]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sqrt{x+9}$. In figuur 1 is de grafiek van f getekend en een lijn met vergelijking $x = p$ met $-9 < p \leq 0$. Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en deze lijn is met grijs aangegeven.

figuur 1



De oppervlakte van het grijze gebied noemen we A . De waarde van A hangt af van de waarde van p . Er geldt:

$$A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$$

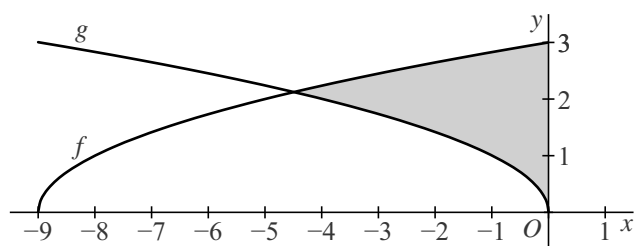
4p 1 Bewijs dat $A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$.

Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ het achtste deel is van de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.

5p 2 Bereken exact deze waarde van p .

De grafiek van f wordt gespiegeld in de y -as. Het spiegelbeeld van de grafiek van f wordt vervolgens 9 naar links verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g . Zie figuur 2.

figuur 2



In figuur 2 is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f , de grafiek van g en de y -as grijs gemaakt. Dit vlakdeel wordt gewenteld om de x -as.

6p 3 Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

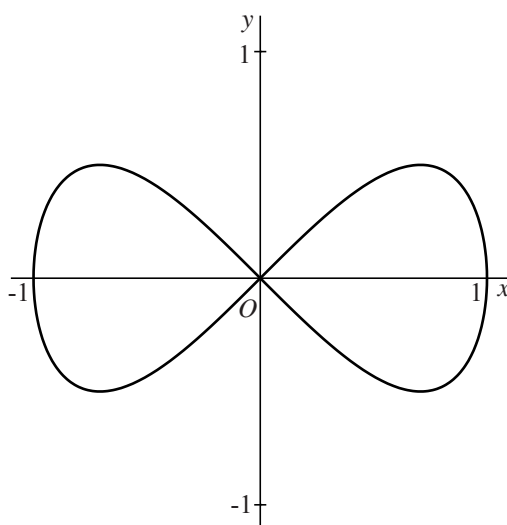
Lemniscaat

De beweging van een punt P wordt beschreven door de vectorvoorstelling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \cdot \cos t \end{pmatrix} \text{ met } 0 \leq t < 2\pi$$

In de figuur is de baan van P getekend. Deze baan wordt **lemniscaat** genoemd.

figuur



Tijdens de beweging passeert punt P vier keer de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{4}$.

4p **4** Bereken exact voor welke waarden van t dit het geval is.

Tijdens de beweging gaat P twee keer door de oorsprong O . De richtingen waarin P de oorsprong passeert zijn verschillend.

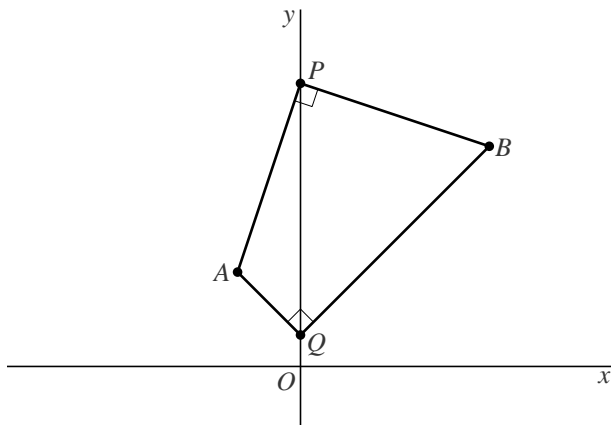
7p **5** Bereken exact de hoek tussen deze twee richtingen.

Twee punten

Gegeven zijn de punten $A(-2,3)$ en $B(6,7)$.

In figuur 1 zijn op de y -as de punten P en Q getekend waarvoor geldt dat $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$.

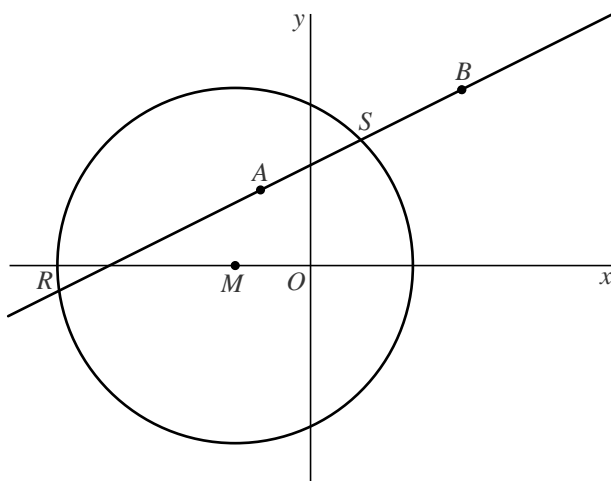
figuur 1



6p **6** Bereken exact de coördinaten van P en Q .

In figuur 2 is de lijn door A en B getekend. Ook is een cirkel getekend met middelpunt $M(-3,0)$. Deze cirkel snijdt de lijn door A en B in de punten R en S met $RS = 6\sqrt{5}$.

figuur 2



6p **7** Bereken exact de straal van de cirkel.

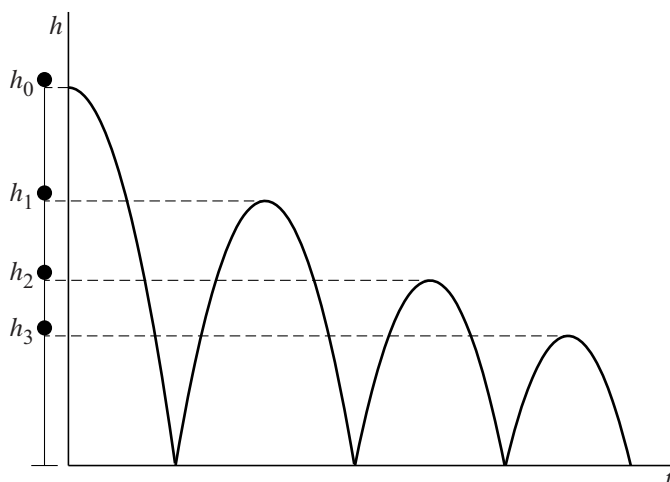
Stuiterende bal

Een bal wordt vanaf een bepaalde hoogte boven een vloer losgelaten en begint vervolgens te stuiteren. In deze opgave bekijken we een wiskundig model van deze situatie.

Op het moment van loslaten bevindt de onderkant van de bal zich h_0 meter boven de vloer. De maximale hoogte van de onderkant van de bal tussen twee keer stuiteren noemen we de **stuihoogte**. De stuihoogte na de eerste keer stuiteren noemen we h_1 , die na de tweede keer stuiteren h_2 , enzovoorts.

Aan de linkerkant van figuur 1 is de bal getekend op verschillende stuihoogtes. Rechts daarvan is de hoogte h van de stuiterende bal (in meters) uitgezet tegen de tijd t (in seconden).

figuur 1



In deze opgave gaan we ervan uit dat de verhouding tussen twee opeenvolgende stuihoogtes constant is, dus $h_1 : h_0$ is gelijk aan $h_2 : h_1$, enzovoorts. Deze verhouding noemen we a . Voor de stuihoogte na n keer stuiteren geldt dan:

$$h_n = h_0 \cdot a^n$$

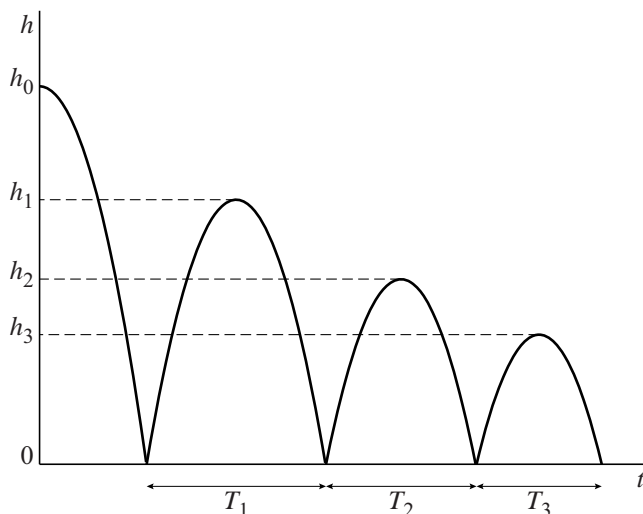
De waarde van a hangt af van het soort bal.

- 3p **8** Bereken de waarde van a voor een bal waarvan na 7 keer stuiteren de stuihoogte 5 keer zo klein is als de hoogte waarop de bal is losgelaten. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De hoogte van de onderkant van de bal tussen twee opeenvolgende keren stuiten is een functie van de tijd. De grafiek van deze functie is een bergparabool.

De tijd in seconden tussen de n -de en de $(n+1)$ -ste keer stuiten noemen we de **stuittijd** T_n . In figuur 2 zijn drie stuitijden aangegeven.

figuur 2



De stuittijd T_n kan worden uitgedrukt in de stuihoogte h_n .

Er geldt:

$$T_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{h_n}{4,9}}$$

Een bal wordt losgelaten vanaf hoogte h_0 . De stuittijd T_1 is 1,11 seconden en de stuittijd T_4 is 0,68 seconden.

- 5p **9** Bereken h_0 . Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.

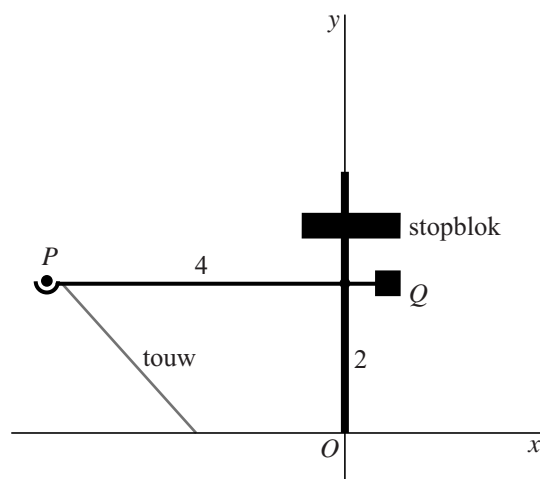
Over de muur

In vroeger tijden probeerde men met een katapult kogels over vestingmuren te slingeren. In deze opgave bekijken we een katapult met een draaibare hefboom. Het linker deel van de hefboom is 4 meter lang. Op het einde daarvan ligt een kogel met middelpunt P . Aan het einde van het rechter deel van de hefboom zit een contragewicht Q . In het begin wordt de hefboom horizontaal gehouden door een touw tussen de hefboom en de grond. De hoogte van de hefboom is dan 2 meter.

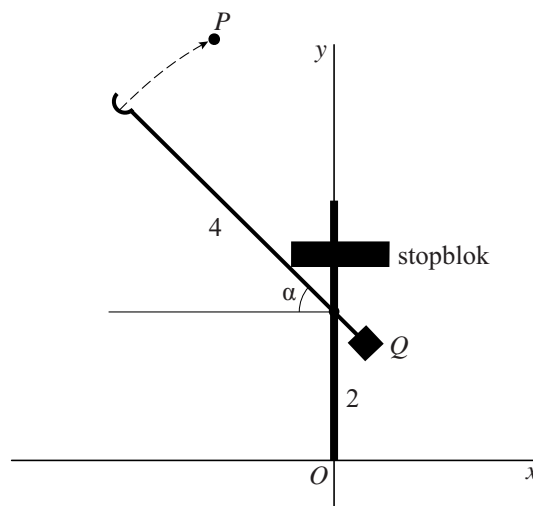
In figuur 1 is deze beginstand getekend in een assenstelsel met oorsprong O op de grond. Punt P heeft dan coördinaten $(-4, 2)$.

Nadat het touw wordt doorgesneden, gaat de hefboom draaien in de richting van de wijzers van de klok, tot deze draaiing door een verstelbaar stopblok wordt gestopt en de kogel wegvliegt. De draaihoek in de eindstand wordt de **stophoek** α genoemd, met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ radialen. In figuur 2 is de eindstand getekend.

figuur 1
beginstand



figuur 2
eindstand



- 2p 10 Druk de coördinaten van P uit in de stophoek α op het moment dat de eindstand wordt bereikt.

Als de hefboom bij stophoek α tot stilstand komt, verlaat de kogel de hefboom en vliegt vervolgens door de lucht. De baan die P dan beschrijft is bij benadering gegeven door de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 20t \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\sin \alpha} - 4 \cos \alpha \\ y(t) = -5t^2 + 2 + 20t \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{\sin \alpha} + 4 \sin \alpha \end{cases}$$

Hierin is t de tijd in seconden vanaf het moment dat de kogel de hefboom verlaat. Verder zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meter en is α in radialen.

Voor y_{top} , de y -coördinaat van het hoogste punt van de baan van P , geldt:

$$y_{\text{top}} = 2 + 24 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha$$

- 5p **11** Bewijs dat de formule voor y_{top} volgt uit de bewegingsvergelijkingen.

Uit de formule voor y_{top} kan de waarde van de stophoek α worden berekend waarvoor de kogel de grootst mogelijke hoogte bereikt. In dit optimale geval zijn de bewegingsvergelijkingen voor P bij benadering gelijk aan:

$$\begin{cases} x(t) = 10,1t - 3,1 \\ y(t) = -5t^2 + 12,3t + 4,5 \end{cases}$$

- 4p **12** Toon met een berekening aan dat in dit geval inderdaad bij benadering geldt: $y(t) = -5t^2 + 12,3t + 4,5$

De stophoek is zo ingesteld dat de kogel zo hoog mogelijk komt. Als de katapult, gemeten vanaf O , 24 meter van een 6 meter hoge vestingmuur staat, komt de kogel niet over de muur.

- 5p **13** Bereken de afstand waarover de katapult minstens in de richting van de muur moet worden verschoven zodat de kogel wel over de muur komt. Geef het antwoord in gehele meters.

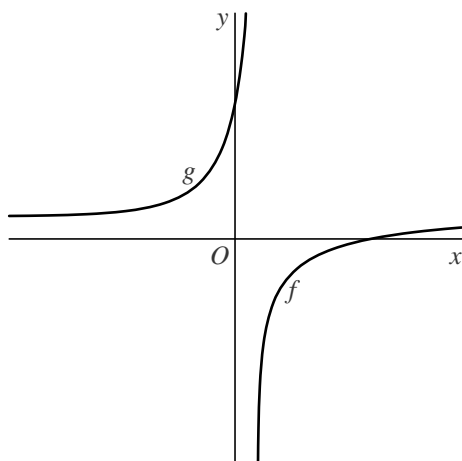
Door de asymptoot

Voor $x > \frac{1}{2}$ is de functie f gegeven door $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$.

De functie g is de inverse van f .

In figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend.

figuur 1



Er geldt: $g(x) = \frac{1+2e^x}{2-e^x}$.

4p 14 Bewijs dit.

De functie h is gegeven door $h(x) = |f(x)|$.

In figuur 2 is de grafiek van h getekend. De grafiek van h heeft een horizontale asymptoot. Deze is in de figuur gestippeld weergegeven.

figuur 2



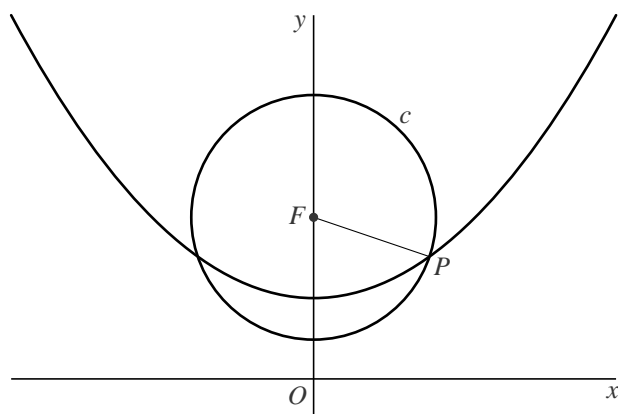
De grafiek van h snijdt de horizontale asymptoot in het punt A .

5p 15 Bereken exact de x -coördinaat van A .

Parabool en cirkel

Gegeven zijn het punt $F(0, 4)$ en de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$.
 Punt P op de parabool ligt rechts van de y -as en heeft x -coördinaat p .
 De cirkel c met middelpunt F gaat door P .
 In figuur 1 is deze situatie voor een bepaalde waarde van p getekend.

figuur 1

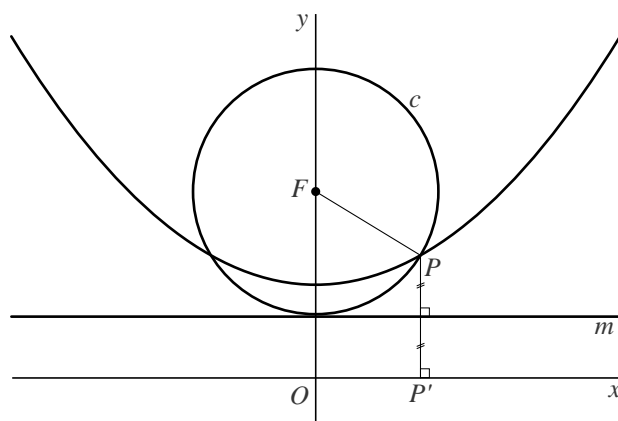


Voor de lengte van de straal FP van de cirkel geldt: $FP = \frac{1}{8}p^2 + 2$.

4p 16 Bewijs dit.

Punt P' is de loodrechte projectie van P op de x -as en lijn m is de middelloodlijn van lijnstuk PP' .
 Afhankelijk van de positie van punt P op de parabool hebben c en m nul, één of twee punten gemeenschappelijk. In figuur 2 is de situatie getekend waarin m en de cirkel elkaar op de y -as raken.

figuur 2



4p 17 Bereken exact de waarde van p voor de in figuur 2 getekende situatie.