

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Het achtste deel

1 maximumscore 4

- $A(p) = \int_{-9}^p \sqrt{x+9} \, dx$ 1

- Een primitieve van $\sqrt{x+9}$ is $\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}$ 2

- $A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(-9+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ 1

of

- $A(p) = \int_{-9}^p \sqrt{x+9} \, dx$ 1

- De afgeleide van $\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ is gelijk aan $\sqrt{p+9}$ 2

- $A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(-9+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ 1

2 maximumscore 5

- De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as is $(A(0) = \frac{2}{3}(0+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 27 =) 18$ 1

- Voor p moet gelden: $A(p) = \frac{18}{8}$ 1

- $\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}} = \frac{18}{8}$ 1

- $p+9 = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ 1

- Het antwoord: $p = -\frac{27}{4}$ (of $p = -6\frac{3}{4}$) 1

Vraag	Antwoord	Scores
3	maximumscore 6	
• Een vergelijking voor het spiegelbeeld van de grafiek van f is	$y = \sqrt{-x+9}$	1
• $g(x) = \sqrt{-x}$		1
• De grafieken van f en g snijden elkaar voor $x = -4\frac{1}{2}$		1
• De inhoud is $\pi \cdot \int_{-4\frac{1}{2}}^0 (x+9--x) dx$		1
• Een primitieve van $2x+9$ is x^2+9x		1
• Invullen van de grenzen geeft $20\frac{1}{4}\pi$		1
of		
• De grafieken van f en g snijden elkaar voor $x = -4\frac{1}{2}$		1
• De grafieken van f en g zijn symmetrisch ten opzichte van de lijn met vergelijking $x = -4\frac{1}{2}$		1
• De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan	$\pi \cdot \int_{-4\frac{1}{2}}^0 (f(x))^2 dx - \pi \cdot \int_{-9}^{-4\frac{1}{2}} (f(x))^2 dx$	2
• Een primitieve van $(f(x))^2$ is $\frac{1}{2}x^2+9x$		1
• Invullen van de grenzen geeft $20\frac{1}{4}\pi$		1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Lemniscaat

4 maximumscore 4

- Er moet gelden $\sin t \cdot \cos t = \frac{1}{4}$ 1
- ($2 \sin t \cdot \cos t = \frac{1}{2}$ geeft) $\sin(2t) = \frac{1}{2}$ 1
- Op het interval $[0, 2\pi)$ zijn de oplossingen $t = \frac{1}{12}\pi$, $t = \frac{5}{12}\pi$, $t = \frac{13}{12}\pi$ en $t = \frac{17}{12}\pi$ 2

5 maximumscore 7

- In de oorsprong geldt $\cos t = 0$ 1
- $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{3}{2}\pi$ 1
- $x'(t) = -\sin t$ 1
- $y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$ (of $y'(t) = \cos(2t)$) 1
- Op $t = \frac{1}{2}\pi$ is de richtingsvector van de raaklijn $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1
- Op $t = \frac{3}{2}\pi$ is de richtingsvector van de raaklijn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1
- Een redenering of berekening waaruit volgt dat de hoek tussen deze vectoren 90° (of $\frac{1}{2}\pi$ (rad)) is 1

Opmerking

Als bij de laatste twee scorepunten symmetrie wordt gebruikt zonder dat deze is aangetoond, hiervoor 2 scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Twee punten

6 maximumscore 6

- De x -coördinaat van P is 0; de y -coördinaat noemen we p 1
- $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ p-3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -6 \\ p-7 \end{pmatrix}$ 2
- $\begin{pmatrix} 2 \\ p-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ p-7 \end{pmatrix} = 0$ 1
- De vergelijking $-12 + (p-3)(p-7) = 0$ geeft $p = 1$ of $p = 9$ (dus $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$) 2

of

- Volgens de stelling van Thales liggen P en Q op de cirkel met middellijn AB 1
- $AB = \sqrt{80}$ ($= 2\sqrt{20}$) en het midden van AB heeft coördinaten $(2, 5)$ (dus de punten P en Q liggen op de cirkel met middelpunt $(2, 5)$ en straal $\frac{1}{2}\sqrt{80}$ ($= \sqrt{20}$)) 2
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 20$ 1
- Voor het snijpunt met de y -as geldt $x = 0$, dus $4 + (y-5)^2 = 20$ 1
- Dit geeft $y = 1$ of $y = 9$ (dus $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$) 1

of

- De x -coördinaat van P is 0; de y -coördinaat noemen we p 1
- $AB^2 = ((7-3)^2 + (6-(-2))^2) = 80$ 1
- $AP^2 = (3-p)^2 + (-2)^2$ 1
- $BP^2 = (7-p)^2 + 6^2$ 1
- (Pythagoras in driehoek ABP geeft) $p^2 - 10p + 9 = 0$ 1
- Dit geeft $p = 1$ of $p = 9$ (dus $P(0, 9)$ en $Q(0, 1)$) 1

7 maximumscore 6

- Een richtingsvector van lijn AB is $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (of: de richtingscoëfficiënt van lijn AB is $\frac{1}{2}$) 1
- Een toelichting of berekening waaruit volgt dat de loodlijn op AB door M lijn AB in het midden van RS snijdt in het punt $T(-4, 2)$ 2
- De afstand van M tot lijn AB is $\sqrt{5}$ 1
- $MT^2 + TS^2 = MS^2$, dus $(\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 = MS^2$ 1
- $MS^2 = 50$, dus de straal is $\sqrt{50}$ ($= 5\sqrt{2}$) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	• Een vergelijking van de lijn door A en B is $y = \frac{1}{2}x + 4$	1
	• Substitutie in de vergelijking van de cirkel geeft: $(x+3)^2 + (\frac{1}{2}x+4)^2 = r^2$	1
	• $x = -4 + \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}$ of $x = -4 - \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}$	1
	• $R(-4 - \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}, 2 - \frac{1}{5}\sqrt{5r^2 - 25})$ en $S(-4 + \frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25}, 2 + \frac{1}{5}\sqrt{5r^2 - 25})$	1
	• $RS^2 = (\frac{4}{5}\sqrt{5r^2 - 25})^2 + (\frac{2}{5}\sqrt{5r^2 - 25})^2 = 4r^2 - 20$	1
	• $(4r^2 - 20 = 180 \text{ dus}) r = 5\sqrt{2}$	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Stuiterende bal

8 maximumscore 3

- (Uit $h_7 = h_0 \cdot a^7 = \frac{1}{5}h_0$ volgt) $a^7 = \frac{1}{5}$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $a = 0,79$ 1

9 maximumscore 5

- $2 \cdot \sqrt{\frac{h_1}{4,9}} = 1,11$ geeft $h_1 \approx 1,509$ (of nauwkeuriger) 1
- $2 \cdot \sqrt{\frac{h_4}{4,9}} = 0,68$ geeft $h_4 \approx 0,566$ (of nauwkeuriger) 1
- (h_n neemt exponentieel af met factor a dus) $a^3 \approx \frac{0,566}{1,509}$ 1
- $a \approx 0,721$ (of nauwkeuriger) 1
- $h_0 = \frac{h_1}{a} \approx \frac{1,509}{0,721} \approx 2,1$ (meter) (of 21 decimeter) 1

Opmerking

Als wordt gerekend met 2 decimalen in plaats van 3 decimalen achter de komma, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Over de muur

10 maximumscore 2

- $x_P = -4 \cos \alpha$ 1
- $y_P = 2 + 4 \sin \alpha$ 1

11 maximumscore 5

- $\frac{dy}{dt} = -10t + 20 \cos \alpha \sqrt{\sin \alpha}$ 1
- In het hoogste punt geldt $t = 2 \cos \alpha \sqrt{\sin \alpha}$ 1
- $y_{\text{top}} = -5(2 \cos \alpha \sqrt{\sin \alpha})^2 + 2 + 4 \sin \alpha + 20 \cdot 2(\cos \alpha \sqrt{\sin \alpha})^2$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + 4 \sin \alpha = 2 + 24 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha$ 1

of

- In het hoogste punt geldt $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{20 \cos \alpha \cdot \sqrt{\sin \alpha}}{-10} = 2 \cos \alpha \cdot \sqrt{\sin \alpha}$ 2
- $y_{\text{top}} = -5(2 \cos \alpha \cdot \sqrt{\sin \alpha})^2 + 2 + 4 \sin \alpha + 20 \cdot 2(\cos \alpha \cdot \sqrt{\sin \alpha})^2$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20 \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) + 4 \sin \alpha = 2 + 24 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha$ 1

12 maximumscore 4

- Beschrijven hoe de waarde van α kan worden gevonden waarvoor y_{top} maximaal is 1
- $\alpha \approx 0,685$ (of nauwkeuriger) 1
- $\sin \alpha \approx 0,632$ (of nauwkeuriger) en $\cos \alpha \approx 0,774$ (of nauwkeuriger) (of $\cos \alpha \approx 0,775$ of nauwkeuriger) 1
- Dus bij benadering geldt:

$$y(t) = -5t^2 + 2 + 4 \cdot 0,632 + 20t \cdot 0,774 \cdot \sqrt{0,633} = -5t^2 + 12,3t + 4,5$$
 1

13 maximumscore 5

- De vergelijking $-5t^2 + 12,3t + 4,5 = 6$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $t \approx 2,33$ (of nauwkeuriger) ($t \approx 0,13$ voldoet niet) 1
- $x(2,33) \approx 20,4$ (of nauwkeuriger) 1
- Het antwoord: 4 (m) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Door de asymptoot

14 maximumscore 4

- Voor een formule van g geldt $x = \ln\left(\frac{2y-1}{y+2}\right)$ 1
 - Dit geeft $\frac{2y-1}{y+2} = e^x$ 1
 - Herleiden tot $2y - y \cdot e^x = 1 + 2e^x$ 1
 - Dit geeft $y(2 - e^x) = 1 + 2e^x$, dus $y = \frac{1 + 2e^x}{2 - e^x}$ (dus g is de inverse van f) 1
- of
- Er moet gelden $g(f(x)) = x$ (voor elke x uit het domein) 1
 - $g(f(x)) = \frac{1 + 2 \cdot \frac{2x-1}{x+2}}{2 - \frac{2x-1}{x+2}}$ 1
 - (Teller en noemer met $x+2$ vermenigvuldigen geeft) $\frac{(x+2) + 2 \cdot (2x-1)}{2 \cdot (x+2) - (2x-1)}$ 1
 - Dit vereenvoudigen tot $\frac{5x}{5} = x$ (dus g is de inverse van f) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

15 maximumscore 5

- $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$ dus de horizontale asymptoot is de lijn met vergelijking

$$y = \ln 2$$

(of: een redenering waaruit blijkt dat de horizontale asymptoot de lijn met vergelijking $y = \ln 2$ is)

- $\left| \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) \right| = \ln 2$ geeft $\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \ln 2$ of $\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = -\ln 2$ 1
- Dit geeft $\frac{2x-1}{x+2} = 2$ of $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{1}{2}$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $x = \frac{4}{3}$ 2

of

- $2 - e^x = 0$ als $x = \ln 2$, dus de lijn met vergelijking $x = \ln 2$ is de verticale asymptoot van de grafiek van g . De horizontale asymptoot van de grafiek van f heeft dus vergelijking $y = \ln 2$. 1
- $\left| \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) \right| = \ln 2$ geeft $\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \ln 2$ of $\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = -\ln 2$ 1
- Dit geeft $\frac{2x-1}{x+2} = 2$ of $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{1}{2}$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $x = \frac{4}{3}$ 2

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Parabool en cirkel

16 maximumscore 4

- Punt P heeft coördinaten $(p, \frac{1}{8}p^2 + 2)$ 1
- (De stelling van Pythagoras toepassen geeft)

$$FP = \sqrt{p^2 + (\frac{1}{8}p^2 + 2 - 4)^2} = \sqrt{p^2 + (\frac{1}{8}p^2 - 2)^2}$$
 1
- $$FP = \sqrt{\frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + 4}$$
 1
- $$FP = \sqrt{(\frac{1}{8}p^2 + 2)^2} = \frac{1}{8}p^2 + 2$$
 1

17 maximumscore 4

- Een vergelijking van de middelloodlijn m is $y = \frac{1}{16}p^2 + 1$ 1
 - De afstand van F tot m is $4 - (\frac{1}{16}p^2 + 1) = 3 - \frac{1}{16}p^2$ 1
 - Deze afstand is gelijk aan FP als $\frac{1}{8}p^2 + 2 = 3 - \frac{1}{16}p^2$ 1
 - Dit geeft $\frac{3}{16}p^2 = 1$, dus (wegens $p > 0$) $p = \sqrt{\frac{16}{3}}$ (of een gelijkwaardige vorm) 1
- of
- Een vergelijking van c is $x^2 + (y - 4)^2 = (\frac{1}{8}p^2 + 2)^2$ 1
 - $(0, \frac{1}{16}p^2 + 1)$ ligt op c 1
 - Invullen geeft $(\frac{1}{16}p^2 - 3)^2 = (\frac{1}{8}p^2 + 2)^2$ 1
 - Dit geeft $\frac{3}{16}p^2 = 1$, dus (wegens $p > 0$) $p = \sqrt{\frac{16}{3}}$ (of een gelijkwaardige vorm) 1