

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Wortelfuncties

### 1 maximumscore 6

- (De grafieken van  $f$  en  $g$  snijden elkaar in  $(0, 0)$  dus) er moet gelden:

$$\int_0^a \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) dx = \int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x} dx \quad (\text{ofwel} \quad \int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x} dx = \int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x} dx) \quad 2$$

- Een primitieve van  $\frac{1}{2}\sqrt{x}$  is  $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$  1
- Invullen van de grenzen geeft  $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$  1
- Dit geeft  $a^{\frac{3}{2}} = 4$  1
- Dus  $a = \sqrt[3]{16}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Wegens  $f(x) = 2 \cdot g(x)$  zijn de begrensde vlakdelen links van  $x = a$  even groot en rechts van  $x = a$  ook, dus moeten de vier begrensde vlakdelen even groot zijn 1
- Er moet gelden:  $\int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 \sqrt{x} dx$  (of  $\int_0^a \sqrt{x} dx = \int_a^4 \sqrt{x} dx$ ) 1
- Een primitieve van  $\sqrt{x}$  is  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  1
- Invullen van de grenzen geeft  $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3}$  (of  $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$ ) 1
- Dit geeft  $a^{\frac{3}{2}} = 4$  1
- Dus  $a = \sqrt[3]{16}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- De oppervlakte van het ene vlakdeel is  $\int_0^a \left( \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) dx = \int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x} dx$  1
- $\int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x} dx = \left[ \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$  1
- De oppervlakte van het andere vlakdeel is  $\int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x} dx$  1
- $\int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x} dx = \left[ \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_a^4 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$  1
- $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$  geeft  $a^{\frac{3}{2}} = 4$  1
- Dus  $a = \sqrt[3]{16}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**2 maximumscore 4**

- De coördinaten van  $P$  zijn  $(p, \sqrt{p})$  1
- Voor de coördinaten van  $M$  geldt:  $x = \frac{1}{2}p + 1$  en  $y = \frac{1}{2}\sqrt{p}$  1
- $h(\frac{1}{2}p + 1) = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}p + 1) - \frac{1}{2}}$  1
- $\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}p + 1) - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}p} = \frac{1}{2}\sqrt{p}$  (, dus  $M$  ligt op de grafiek van  $h$ ) 1

of

- De coördinaten van  $P$  zijn  $(p, \sqrt{p})$  1
- Voor de coördinaten van  $M$  geldt:  $x = \frac{1}{2}p + 1$  en  $y = \frac{1}{2}\sqrt{p}$  1
- $x = \frac{1}{2}p + 1$  geeft  $p = 2x - 2$  1
- Dus  $y = \frac{1}{2}\sqrt{2x - 2} = \sqrt{\frac{1}{4}(2x - 2)} = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$  (, dus  $M$  ligt op de grafiek van  $h$ ) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Cirkels en lijnstuk

#### 3 maximumscore 5

- Er geldt:  $\cos(2t) = 0$  1
- Dit geeft  $t = \frac{1}{4}\pi$  of  $t = \frac{3}{4}\pi$  of  $t = \frac{5}{4}\pi$  of  $t = \frac{7}{4}\pi$  2
- $x_A(\frac{1}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi) = y_A(\frac{1}{4}\pi) (= \frac{1}{2}\sqrt{2})$ ,  
 $x_A(\frac{3}{4}\pi) = \sin(\frac{3}{4}\pi) = -\cos(\frac{3}{4}\pi) = -y_A(\frac{3}{4}\pi) (= \frac{1}{2}\sqrt{2})$ ,  
 $x_A(\frac{5}{4}\pi) = \sin(\frac{5}{4}\pi) = \cos(\frac{5}{4}\pi) = y_A(\frac{5}{4}\pi) (= -\frac{1}{2}\sqrt{2})$  en  
 $x_A(\frac{7}{4}\pi) = \sin(\frac{7}{4}\pi) = -\cos(\frac{7}{4}\pi) = -y_A(\frac{7}{4}\pi) (= -\frac{1}{2}\sqrt{2})$   
 (, dus  $A$  bevindt zich op deze tijdstippen op de lijn met vergelijking  $y = x$  of op de lijn met vergelijking  $y = -x$ ) 2

of

- Er geldt:  $\cos(2t) = 0$  1
- Dit geeft  $\cos^2 t - \sin^2 t = 0$  1
- Dus  $(\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t) = 0$  1
- Hieruit volgt  $\cos t = \sin t$  of  $\cos t = -\sin t$  1
- Dus  $A$  ligt op de lijn met vergelijking  $y = x$  of op de lijn met vergelijking  $y = -x$  1

#### Opmerking

*Als bij de eerste werkwijze hierboven niet voor alle vier waarden van  $t$  de juistheid van de bewering is aangetoond, dan per ontbrekende situatie 1 scorepunt in mindering brengen.*

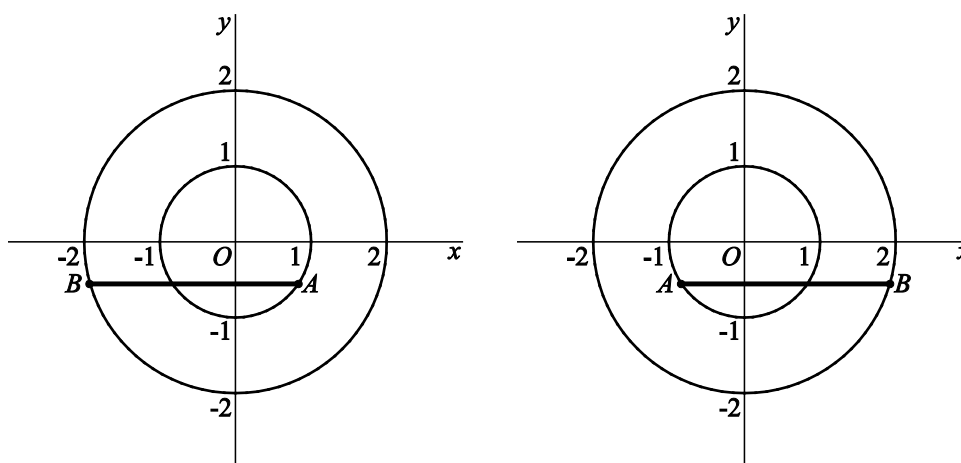
Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**4 maximumscore 6**

- Er moet gelden:  $2 \cos(2t) = \cos t$  1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Een oplossing behorende bij een negatieve  $y$ -coördinaat is  $t \approx 2,21$  (of  $t \approx 4,08$ ) 1
- De coördinaten van  $A$  zijn dan (ongeveer)  $(0,8; -0,6)$  (of  $(-0,8; -0,6)$ ) 1
- De coördinaten van  $B$  zijn dan (ongeveer)  $(-1,9; -0,6)$  (of  $(1,9; -0,6)$ ) (of een correcte beredenering waaruit de juiste ligging van  $B$  volgt) 1
- Een mogelijke tekening van lijnstuk  $AB$  (zie hieronder de twee mogelijkheden) 1

of

- Er moet gelden:  $2 \cos(2t) = \cos t$  1
- Hieruit volgt  $2(2 \cos^2 t - 1) = \cos t$  1
- $4 \cos^2 t - \cos t - 2 = 0$  geeft  $\cos t = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$  met als negatieve oplossing  $\cos t \approx -0,6$  1
- De coördinaten van  $A$  zijn dan (ongeveer)  $(0,8; -0,6)$  (of  $(-0,8; -0,6)$ ) 1
- De coördinaten van  $B$  zijn dan (ongeveer)  $(-1,9; -0,6)$  (of  $(1,9; -0,6)$ ) (of een correcte beredenering waaruit de juiste ligging van  $B$  volgt) 1
- Een mogelijke tekening van lijnstuk  $AB$  (zie hieronder de twee mogelijkheden) 1



Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**5 maximumscore 6**

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) - \sin t \\ 2 \cos(2t) - \cos t \end{pmatrix}$  1
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) - \sin t \\ 2 \cos(2t) - \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 0$  1
- $2 \sin(2t) \sin t - \sin^2 t + 2 \cos(2t) \cos t - \cos^2 t = 0$  1
- $2 \sin(2t) \sin t + 2 \cos(2t) \cos t = \sin^2 t + \cos^2 t$  geeft 1  
 $\cos(2t) \cos t + \sin(2t) \sin t = \frac{1}{2}$
- Ook geldt:  $\cos(2t) \cos t + \sin(2t) \sin t = \cos(2t - t) = \cos t$  1
- $\cos t = \frac{1}{2}$  geeft  $t = \frac{1}{3} \pi$  1

of

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) - \sin t \\ 2 \cos(2t) - \cos t \end{pmatrix}$  1
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \sin(2t) - \sin t \\ 2 \cos(2t) - \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = 0$  1
- $2 \sin(2t) \sin t - \sin^2 t + 2 \cos(2t) \cos t - \cos^2 t = 0$  1
- $2 \cdot 2 \sin t \cos t \cdot \sin t - \sin^2 t + 2(1 - 2 \sin^2 t) \cos t - \cos^2 t = 0$  1
- Hieruit volgt  $2 \cos t = \sin^2 t + \cos^2 t$ , dus  $2 \cos t = 1$  1
- $\cos t = \frac{1}{2}$  geeft  $t = \frac{1}{3} \pi$  1

of

- De richtingscoëfficiënt van  $AB$  is  $\frac{2 \cos(2t) - \cos t}{2 \sin(2t) - \sin t}$  1
- (Voor het product van de richtingscoëfficiënten geldt:) 1  
 $\frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{2 \cos(2t) - \cos t}{2 \sin(2t) - \sin t} = -1$
- $2 \cos(2t) \cos t - \cos^2 t = -2 \sin(2t) \sin t + \sin^2 t$  1
- $2(1 - 2 \sin^2 t) \cos t - \cos^2 t = -2 \cdot 2 \sin t \cos t \cdot \sin t + \sin^2 t$  1
- Hieruit volgt  $2 \cos t - \cos^2 t = \sin^2 t$ , dus  $2 \cos t = \sin^2 t + \cos^2 t$ , dus  $2 \cos t = 1$  1
- $\cos t = \frac{1}{2}$  geeft  $t = \frac{1}{3} \pi$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Asymptoten, perforatie en linkertop

#### 6 maximumscore 4

- $f_5(x) = \frac{2x(2x-5)+4}{2x-5} = 2x + \frac{4}{2x-5}$  (voor  $x \neq 2\frac{1}{2}$ ) 1

- Een vergelijking van de scheve asymptoot is  $y = 2x$  (, want

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2x-5} = 0) \quad 1$$

- $\cos \beta = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} (= \frac{2}{\sqrt{5}})$  (of  $\tan \beta = \frac{1}{2}$ ) 1

- $\beta \approx 27^\circ$  (of nauwkeuriger) 1

of

- $f_5(x) = \frac{2x(2x-5)+4}{2x-5} = 2x + \frac{4}{2x-5}$  (voor  $x \neq 2\frac{1}{2}$ ) 1

- Een vergelijking van de scheve asymptoot is  $y = 2x$  (, want

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2x-5} = 0) \quad 1$$

- $\tan \alpha = 2$  (dus  $\alpha \approx 63^\circ$ ), waarbij  $\alpha$  de hellingshoek is van de scheve asymptoot 1

- $\beta (= 90^\circ - \alpha) \approx 27^\circ$  (of nauwkeuriger) 1

Vraag	Antwoord	Scores
<b>7</b>	<b>maximumscore 7</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'_a(x) = \frac{(8x-10) \cdot (2x-a) - (4x^2-10x+4) \cdot 2}{(2x-a)^2}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f'_a(x) = 0</math> geeft <math>8x^2 - 8ax + 10a - 8 = 0</math></li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• De oplossingen van deze vergelijking zijn</li> </ul> $x = \frac{-8a \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (10a - 8)}}{2 \cdot 8}$ (of voor de linkertop geldt: $x = \frac{-8a - \sqrt{(-8a)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (10a - 8)}}{2 \cdot 8}$	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Voor de linkertop geldt: <math>x = \frac{8a - \sqrt{64a^2 - 320a + 256}}{16}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• De linkertop ligt op de y-as als <math>\sqrt{64a^2 - 320a + 256} = 8a</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Exact oplossen van <math>\sqrt{64a^2 - 320a + 256} = 8a</math> geeft <math>a = \frac{4}{5}</math></li> </ul>	1
<b>8</b>	<b>maximumscore 6</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>a</math> moet zo gekozen worden, dat geldt:) <math>4x^2 - 10x + 4 = 0</math> heeft dezelfde oplossing als <math>2x - a = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>4x^2 - 10x + 4 = 0</math> exact oplossen geeft <math>x = \frac{1}{2}</math> of <math>x = 2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x = \frac{1}{2}</math> geeft <math>a = 1</math>, <math>x = 2</math> geeft <math>a = 4</math> (dus de grootste waarde van <math>a</math> is 4)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f_4</math> herleiden tot <math>f_4(x) = 2x + \frac{-2x+4}{2x-4}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f_4(x) = 2x - 1</math> (voor <math>x \neq 2</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dus de coördinaten van de perforatie zijn (2, 3)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>a</math> moet zo gekozen worden, dat geldt:) <math>4x^2 - 10x + 4 = 0</math> heeft dezelfde oplossing als <math>2x - a = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2x - a = 0</math> exact oplossen geeft <math>x = \frac{1}{2}a</math>; substitutie in <math>4x^2 - 10x + 4 = 0</math> geeft <math>a^2 - 5a + 4 = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Exact oplossen van <math>a^2 - 5a + 4 = 0</math> geeft <math>a = 1</math> of <math>a = 4</math> (dus de grootste waarde van <math>a</math> is 4)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f_4</math> herleiden tot <math>f_4(x) = 2x + \frac{-2x+4}{2x-4}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f_4(x) = 2x - 1</math> (voor <math>x \neq 2</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dus de coördinaten van de perforatie zijn (2, 3)</li> </ul>	1

**Opmerking**

Als niet  $a = 4$ , maar  $a = 1$  gekozen is, leidend tot het antwoord  $(\frac{1}{2}, -3)$ , hiervoor 1 scorepunt in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Loodrecht

**9 maximumscore 7**

- De coördinaten van  $C$  zijn  $(28, 14\sqrt{3})$  1
- De coördinaten van  $D$  zijn  $(7, 7\sqrt{3})$  1
- Een vergelijking van  $AD$  is  $y = -\frac{1}{5}\sqrt{3}(x-42)$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- Een vergelijking van  $OC$  is  $y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x$  1
- $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x = -\frac{1}{5}\sqrt{3}(x-42)$  oplossen geeft  $x = 12$  2

of

- De coördinaten van  $C$  zijn  $(28, 14\sqrt{3})$  1
- De coördinaten van  $D$  zijn  $(7, 7\sqrt{3})$  1
- Een vectorvoorstelling van  $AD$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$  1
- Een vergelijking van  $OC$  is  $y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x$  1
- Substitutie geeft  $t\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}(42-5t)$  1
- Dit geeft  $t = 6$  1
- Dus  $x = 12$  1

of

- De coördinaten van  $C$  zijn  $(28, 14\sqrt{3})$  1
- De coördinaten van  $D$  zijn  $(7, 7\sqrt{3})$  1
- Een vectorvoorstelling van  $AD$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$  1
- Een vectorvoorstelling van  $OC$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$  1
- Beschrijven hoe het stelsel  $\begin{cases} 42-5t = 2s \\ t\sqrt{3} = s\sqrt{3} \end{cases}$  kan worden opgelost 1
- Dit geeft  $(s =) t = 6$  1
- Dus  $x = 12$  1

of

- Als in  $O$ ,  $B$  en  $A$  achtereenvolgens massa's 4, 2 en 1 liggen, is  $C$  het zwaartepunt van de massa's in  $A$  en  $B$  en is  $D$  het zwaartepunt van de massa's in  $O$  en  $B$  4
- $E$  is het zwaartepunt van deze drie massa's, dus de  $x$ -coördinaat van  $E$  is  $\frac{4}{7} \cdot 0 + \frac{2}{7} \cdot 21 + \frac{1}{7} \cdot 42 = 12$  3



Vraag	Antwoord	Scores
<b>10</b>	<b>maximumscore 3</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De richtingscoëfficiënt van <math>AE</math> is <math>\frac{-6\sqrt{3}}{30}</math> (of <math>-\frac{1}{5}\sqrt{3}</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De richtingscoëfficiënt van <math>BE</math> is <math>\frac{15\sqrt{3}}{9}</math> (of <math>\frac{5}{3}\sqrt{3}</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het product van de richtingscoëfficiënten van <math>AE</math> en <math>BE</math> is <math>(\frac{-6\sqrt{3}}{30} \cdot \frac{15\sqrt{3}}{9}) = -\frac{1}{5}\sqrt{3} \cdot \frac{5}{3}\sqrt{3} = -1</math> (dus <math>\angle AEB = 90^\circ</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een richtingsvector van <math>AE</math> is <math>\begin{pmatrix} -30 \\ 6\sqrt{3} \end{pmatrix}</math> (of <math>\begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een richtingsvector van <math>BE</math> is <math>\begin{pmatrix} -9 \\ -15\sqrt{3} \end{pmatrix}</math> (of <math>\begin{pmatrix} 3 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>(\begin{pmatrix} -5 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} -30 \\ 6\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -15\sqrt{3} \end{pmatrix}) = 0</math> (dus <math>\angle AEB = 90^\circ</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>AB^2 = 21^2 + (21\sqrt{3})^2</math> (of <math>AB^2 = 42^2</math>), <math>BE^2 = 9^2 + (15\sqrt{3})^2</math> en <math>AE^2 = 30^2 + (6\sqrt{3})^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dit is respectievelijk 1764, 756 en 1008</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>AB^2 = BE^2 + AE^2</math> (dus <math>\angle AEB = 90^\circ</math>)</li> </ul>	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Hardheid

### 11 maximumscore 5

- $f'(x) = \frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x \left( = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \right)$  2
- $(f'(x))^2 = \frac{x^2}{25-x^2}$  1
- $1+(f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{25-x^2} = \frac{25}{25-x^2}$  1
- $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{\frac{25}{25-x^2}} = \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}$  1

### 12 maximumscore 3

- $f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{25-x^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{25-x^2}} = 5$  1
- Een primitieve van 5 is  $5x$  1
- $[5x]_{5-h}^5 = 25 - (25-5h) = 5h$ , dus  $A = 2\pi \cdot 5h = 10\pi h$  1

Vraag	Antwoord	Scores
<b>13</b>	<b>maximumscore 5</b>	
	• $(5-h)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 = 5^2$ (of $\frac{1}{2}d = f(5-h) = \sqrt{25 - (5-h)^2}$ )	2
	• $h^2 - 10h + \frac{1}{4}d^2 = 0$	1
	• $h = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}d^2}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - d^2}}{2}$	1
	• $h = \frac{10 + \sqrt{100 - d^2}}{2}$ voldoet niet (omdat de kogel niet verder dan 5 mm in het materiaal mag worden gedrukt)	1
	of	
	• De afstand van het middelpunt van de bol tot de oorspronkelijke bovenkant van het materiaal is $\sqrt{5^2 - (\frac{1}{2}d)^2}$	2
	• $\sqrt{25 - (\frac{1}{2}d)^2} + h = 5$	1
	• Dit geeft $h = 5 - \frac{\sqrt{100 - d^2}}{\sqrt{4}}$	1
	• Dus $h = \frac{10 - \sqrt{100 - d^2}}{2}$	1
	of	
	• $(10 - 2h)^2 + d^2 = 10^2$	2
	• $4h^2 - 40h + d^2 = 0$	1
	• $h = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 4 \cdot d^2}}{2 \cdot 4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - d^2}}{2}$	1
	• $h = \frac{10 + \sqrt{100 - d^2}}{2}$ voldoet niet (omdat de kogel niet verder dan 5 mm in het materiaal mag worden gedrukt)	1
<b>14</b>	<b>maximumscore 5</b>	
	• Uit $340 = \frac{0,102 \cdot 29400}{A}$ volgt $A = 8,82$ (mm <sup>2</sup> )	1
	• Uit $8,82 = 10\pi h$ volgt $h \approx 0,28$ (mm) (of $h = \frac{8,82}{10\pi}$ )	1
	• Er geldt: $0,28 = \frac{10 - \sqrt{100 - d^2}}{2}$ (of $4,72^2 + (\frac{1}{2}d)^2 = 5^2$ )	1
	• Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost	1
	• Het antwoord: (ongeveer) 3,3 (mm)	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Symmetrisch gebied

#### 15 maximumscore 4

- (Vanwege de symmetrie geldt:)  $A(p) = 2 \cdot \int_0^p \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$  2

- $A(p) = 2 \cdot \left( \frac{-1}{e^p + 1} - \frac{-1}{e^0 + 1} \right)$  1

- $A(p) = 2 \cdot \left( \frac{-1}{e^p + 1} + \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{2}{e^p + 1}$  1

of

- $A(p) = \int_{-p}^p \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$  1

- $A(p) = \frac{-1}{e^p + 1} + \frac{1}{e^{-p} + 1}$  1

- $A(p) = \frac{-1}{e^p + 1} + \frac{1}{e^{-p} + 1} \cdot \frac{e^p}{e^p} = \frac{-1}{e^p + 1} + \frac{e^p}{1 + e^p}$  1

- $A(p) = \frac{e^p + 1 - 2}{e^p + 1} = 1 - \frac{2}{1 + e^p}$  1

#### 16 maximumscore 4

- Als  $p$  naar oneindig gaat, dan gaat  $1 - \frac{2}{e^p + 1}$  naar 1 1

- De vergelijking  $1 - \frac{2}{e^p + 1} = \frac{1}{2}$  1

- De herleiding tot  $e^p = 3$  1

- Dus  $p = \ln 3$  1