Vraag		Scores

Hoek onder de top

1 maximumscore 4

- $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 1$ — 1
- $\dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$ geeft $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ — 1
- Dit geeft $x = 2\frac{1}{4}$ — 1
- $f(2\frac{1}{4})\ (= 3\sqrt{2\frac{1}{4}} - 2\frac{1}{4}) = 2\frac{1}{4}$ (dus de coördinaten van T zijn $\left(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$) — 1

2 maximumscore 4

- $\overrightarrow{TO} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{4} \\ -2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{TA} = \begin{pmatrix} 6\frac{3}{4} \\ -2\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ — 1
- $\cos\angle OTA = \dfrac{\begin{pmatrix} -2\frac{1}{4} \\ -2\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\frac{3}{4} \\ -2\frac{1}{4} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2\frac{1}{4} \\ -2\frac{1}{4} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 6\frac{3}{4} \\ -2\frac{1}{4} \end{pmatrix}\right|}$ (of $\cos\angle OTA = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}$) — 1
- $\cos\angle OTA\ (= \dfrac{-2}{\sqrt{20}}) \approx -0{,}45$ — 1
- Het antwoord: $117°$ — 1

of

- $OA = 9$, $OT = 2\frac{1}{4}\sqrt{2}$ en $AT = 2\frac{1}{4}\sqrt{10}$ — 1
- De cosinusregel toepassen in driehoek OAT geeft
  $9^2 = \left(2\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^2 - 2 \cdot 2\frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot 2\frac{1}{4}\sqrt{10} \cdot \cos\angle OTA$ — 1
- Hieruit volgt $\cos\angle OTA\ (= \dfrac{-2}{\sqrt{20}}) \approx -0{,}45$ — 1
- Het antwoord: $117°$ — 1

of

- $\tan\angle TOT' = \dfrac{2\frac{1}{4}}{2\frac{1}{4}} = 1$, waarbij T' de loodrechte projectie van T op de x-as is — 1
- $\tan\angle TAT' = \dfrac{2\frac{1}{4}}{6\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$ — 1
- Hieruit volgt $\angle TOT' = 45°$ en $\angle TAT' \approx 18°$ — 1
- $\angle OTA = 180° - \angle TOT' - \angle TAT'$, dus het antwoord is $117°$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Het uiteinde van een wip

3 maximumscore 3

- $h_2(\tfrac{5}{3}) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\cdot\frac{5}{3} - \frac{\pi}{5}\right) = 1 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ 1
- $h_3(\tfrac{5}{3}) = 1 + 2\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{6\pi}{5}\cdot\frac{5}{3} - \frac{31\pi}{30}\right)$ 1
- Dit geeft $h_3(\tfrac{5}{3}) = 1 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ (dus de hoogtes zijn gelijk) 1

4 maximumscore 4

- $h_1'(t) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{3\pi}{10}\cdot 2t$ 2
- $h_1'(\tfrac{1}{3}) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{90} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{3\pi}{10}\cdot\frac{2}{3} = 2\cos\left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{2\pi}{10}$ 1
- Dus $h_1'(\tfrac{1}{3}) = \frac{2\pi}{5}\cos\left(-\frac{2\pi}{15}\right) = \frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$ (dus de hellingen zijn gelijk) 1

5 maximumscore 4

- $h_2(1-a) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}(1-a) - \frac{\pi}{5}\right) = 1 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{5}a\right)$ (voor $0 < a < \frac{2}{3}$) 1
- $h_2(1-a) = 1 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{5}a\right) = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{5}a\right)$ 1
- $h_2(1+a) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}(1+a) - \frac{\pi}{5}\right) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}a\right)$ 1
- $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{5}a\right) + 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}a\right) = 2$
  (, dus $\frac{h_2(1-a) + h_2(1+a)}{2} = 1$) 1

of

- De gelijkheid geldt als de grafiek van h_2 puntsymmetrisch is ten opzichte van $(1, 1)$ 1
- De grafiek van h_2 is een sinusoïde en daarom puntsymmetrisch ten opzichte van elk punt van de grafiek dat op de evenwichtsstand ligt 1
- De evenwichtsstand van h_2 is 1 1
- $h_2(1) = 1 + 2\sin 0 = 1$, dus de grafiek van h_2 is puntsymmetrisch ten opzichte van $(1, 1)$ (dus de gelijkheid geldt) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Laagste punt

6 maximumscore 5

- Een vectorvoorstelling van de middelloodlijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}p^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -p^2 \\ p \end{pmatrix}$ 2
- $x_S = 0$ geeft $t = \dfrac{1}{2p}$ 1
- $y_S = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}$ 1
- Als p tot 0 nadert, nadert y_S tot $\frac{1}{2}$ 1

of

- Het midden van OP is $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p^2)$ 1
- De helling van de middelloodlijn is $-\dfrac{1}{p}$ 1
- Een vergelijking van de middelloodlijn is $y = -\dfrac{1}{p}x + y_S$ 1
- Invullen van $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p^2)$ geeft $y_S = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}$ 1
- Als p tot 0 nadert, nadert y_S tot $\frac{1}{2}$ 1

of

- Het midden van OP is $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p^2)$ 1
- $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ p^2 \end{pmatrix}$ is normaalvector van de middelloodlijn, dus $px + p^2y = c$ is een vergelijking van de middelloodlijn (voor zekere waarde van c) 1
- Punt $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p^2)$ invullen geeft $c = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^4$ 1
- $y_S = \dfrac{\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^4}{p^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p^2$ 1
- Als p tot 0 nadert, nadert y_S tot $\frac{1}{2}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Gespiegelde punten

7	**maximumscore 8**	
	• Er geldt $y_Q = -x_P$	1
	• De x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x-as is 1	1
	• $x_P = 1 - a$	1
	• De y-coördinaat van het punt op de grafiek van f met x-coördinaat a is $2 \cdot \ln a$	1
	• $y_Q = 2 \cdot \ln a$	1
	• $2 \cdot \ln a = -(1 - a)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
	• Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost	1
	• ($a = 1$ voldoet niet, dus) het antwoord is 3,51	1
	of	
	• Er geldt $y_Q = -x_P$	1
	• $g(x) = 2 \cdot \ln(x + a)$	1
	• x_P is de oplossing van $2 \cdot \ln(x + a) = 0$	1
	• $x_P = 1 - a$	1
	• $y_Q = 2 \cdot \ln a$	1
	• $2 \cdot \ln a = -(1 - a)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
	• Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost	1
	• ($a = 1$ voldoet niet, dus) het antwoord is 3,51	1

Vraag	Antwoord	Scores

Ankerketting

8 maximumscore 6

- $f'(x)=\frac{1}{2a}\cdot\left(a\cdot e^{ax}-a\cdot e^{-ax}\right)=\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{1}{2}e^{-ax}$ 2
- $\left(\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2=\frac{1}{4}e^{2ax}-2\cdot\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{1}{2}e^{-ax}+\frac{1}{4}e^{-2ax}$ 1
- $\left(\frac{1}{2}e^{ax}+\frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2=\frac{1}{4}e^{2ax}+2\cdot\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{1}{2}e^{-ax}+\frac{1}{4}e^{-2ax}$ 1
- $\left(\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2=\frac{1}{4}e^{2ax}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2ax}$ en
  $\left(\frac{1}{2}e^{ax}+\frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2=\frac{1}{4}e^{2ax}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2ax}$ 1
- $1+\left(f'(x)\right)^2=1+\frac{1}{4}e^{2ax}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2ax}=$
  $\frac{1}{4}e^{2ax}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2ax}=\left(\frac{1}{2}e^{ax}+\frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2$ (dus geldt de gelijkheid) 1

9 maximumscore 5

- De waterdiepte is $f(96)\approx 34$ (meter) (of nauwkeuriger) 1
- De lengte van de ankerketting is $\int_0^{96}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ 1
- Beschrijven hoe deze integraal met de GR kan worden berekend 1
- De lengte van de ankerketting is ongeveer 104 meter (of nauwkeuriger) 1
- ($104>3\cdot 34$, dus) de ankerketting voldoet aan de vuistregel 1

of

- De waterdiepte is $f(96)\approx 34$ (meter) (of nauwkeuriger) 1
- De lengte van de ankerketting is $\int_0^{96}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ 1
- $\int_0^{96}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^{96}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{140}\cdot x}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{140}\cdot x}\right)dx$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{140}\cdot x}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{140}\cdot x}$ is $70e^{\frac{1}{140}\cdot x}-70e^{-\frac{1}{140}\cdot x}$;
  $70e^{\frac{96}{140}}-70e^{-\frac{96}{140}}\approx 104$ (en $70e^0-70e^0=0$), dus de lengte van de ankerketting is ongeveer 104 meter (of nauwkeuriger) 1
- ($104>3\cdot 34$, dus) de ankerketting voldoet aan de vuistregel 1

Vraag	Antwoord	Scores

Een gebroken functie en zijn inverse

10 maximumscore 4

- Er moet gelden $f(g(x)) = x$ 1
- $f\left(\dfrac{x}{4-x}\right) = 4 - \dfrac{4}{\dfrac{x}{4-x}+1}$ 1
- $4 - \dfrac{4}{\dfrac{x}{4-x}+1} = 4 - \dfrac{16-4x}{x+4-x} = 4-(4-x) = x$ (dus g is de inverse van f) 2

of

- Punt (x, y) ligt op de grafiek van de inverse van f als $x = 4 - \dfrac{4}{y+1}$ 1
- Hieruit volgt $\dfrac{4}{y+1} = 4 - x$ 1
- Dus $y = \dfrac{4}{4-x} - 1$ 1
- Dit herleiden tot $y = \dfrac{x}{4-x}$ (dus g is de inverse van f) 1

Vraag	Antwoord	Scores

11 **maximumscore 6**

- Omdat f en g elkaars inverse zijn, wordt het gebied door de lijn met vergelijking $y = x$ in twee gelijke delen verdeeld — 1
- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $2 \cdot \int_0^3 (f(x) - x)\,\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $f(x) - x$ (voor $x > -1$) is $4x - 4\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2$ — 2
- Elk van de twee delen heeft dus een oppervlakte van $\left[4x - 4\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = 12 - 4\ln 4 - 4\frac{1}{2}$ — 1
- De gevraagde oppervlakte is $15 - 8\ln 4$ — 1

of

- Het vierkant met diagonaal door $(0, 0)$ en $(3, 3)$ wordt door de grafieken van f en g in drie delen verdeeld, waarbij de oppervlakten van de niet-grijsgemaakte delen aan elkaar gelijk zijn — 1
- De gevraagde oppervlakte is $3 \cdot 3 - 2 \cdot \int_0^3 (3 - f(x))\,\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $3 - f(x)$ (voor $x > -1$) is $-x + 4\ln(x+1)$ — 2
- Het linkerdeel heeft een oppervlakte van $\left[-x + 4\ln(x+1)\right]_0^3 = -3 + 4\ln 4$ — 1
- De gevraagde oppervlakte is $9 - 2(-3 + 4\ln 4) = 15 - 8\ln 4$ — 1

of

- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ — 1
- $g(x) = -1 + \dfrac{4}{4-x}$ — 2
- Een primitieve van $4 - \dfrac{4}{x+1}$ (voor $x > -1$) is $4x - 4\ln(x+1)$ — 1
- Een primitieve van $-1 + \dfrac{4}{4-x}$ (voor $x < 4$) is $-x - 4\ln(4-x)$ — 1
- De gevraagde oppervlakte is $\left[4x - 4\ln(x+1)\right]_0^3 - \left[-x - 4\ln(4-x)\right]_0^3 = 12 - 4\ln 4 - (-3 + 4\ln 4) = 15 - 8\ln 4$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Tussen twee bewegende punten

12 maximumscore 4

- De lengte van $A'B'$ is $|x_A - x_B|$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van $|\cos(3t) - \cos t|$ gevonden kan worden 1
- Per rondgang zijn er 4 maxima die even groot zijn 1
- Het antwoord: 1,54 1

of

- Het verschil tussen de x-coördinaat van A' en de x-coördinaat van B' is $x_A - x_B$ 1
- Beschrijven hoe het maximum en het minimum van $\cos(3t) - \cos t$ gevonden kunnen worden 1
- Per rondgang zijn er 2 maxima en 2 minima die in absolute waarde even groot zijn 1
- Het antwoord: 1,54 1

Opmerking
Als alleen het maximum van $x_A - x_B$ ofwel $x_B - x_A$ wordt beschouwd, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

13 maximumscore 4

- De richtingscoëfficiënt van koorde AB is gelijk aan $\dfrac{\sin(3t) - \sin t}{\cos(3t) - \cos t}$ 1
- $\sin(3t) - \sin t = 2\sin t \cdot \cos(2t)$ 1
- $\cos(3t) - \cos t = -2\sin(2t) \cdot \sin t$ 1
- Dus $a = \dfrac{2\sin t \cdot \cos(2t)}{-2\sin(2t) \cdot \sin t} = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$ (want $\sin t \neq 0$) 1

Vraag	Antwoord	Scores

14 maximumscore 5

- $-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}=-1$ geeft $\cos(2t)=\sin(2t)$ — 1
- $\sin(2t)=\cos(2t-\frac{1}{2}\pi)$, dus $\cos(2t)=\cos(2t-\frac{1}{2}\pi)$ — 1
- $2t=2t-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) (welke geen oplossingen heeft) of
  $2t=-2t+\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ (met k geheel) — 1
- $4t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$, dus $t=\frac{1}{8}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$ (met k geheel) — 1
- Het antwoord: $t=\frac{1}{8}\pi$ of $t=\frac{5}{8}\pi$ of $t=1\frac{1}{8}\pi$ of $t=1\frac{5}{8}\pi$ — 1

of

- $-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}=-1$ geeft $\cos(2t)=\sin(2t)$ — 1
- (Een redenering met eenheidscirkel of grafieken waaruit volgt dat)
  $2t=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\pi$ (met k geheel) — 2
- $t=\frac{1}{8}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$ (met k geheel) — 1
- Het antwoord: $t=\frac{1}{8}\pi$ of $t=\frac{5}{8}\pi$ of $t=1\frac{1}{8}\pi$ of $t=1\frac{5}{8}\pi$ — 1

of

- $-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}=-1$ geeft $-\dfrac{1}{\tan(2t)}=-1$ — 1
- $\tan(2t)=1$ — 1
- $2t=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\pi$ (met k geheel) — 1
- $t=\frac{1}{8}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$ (met k geheel) — 1
- Het antwoord: $t=\frac{1}{8}\pi$ of $t=\frac{5}{8}\pi$ of $t=1\frac{1}{8}\pi$ of $t=1\frac{5}{8}\pi$ — 1

Ingesloten cirkel

15 maximumscore 5

- $\dfrac{MD}{OB}=\dfrac{AM}{AO}$ — 1
- $AM=a-1-r$ — 1
- $\dfrac{r}{1}=\dfrac{a-1-r}{a}$ — 1
- $ar+r=a-1$ — 1
- $r(a+1)=a-1$ (dus $r=\dfrac{a-1}{a+1}$) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

16 **maximumscore 5**

- Er geldt $OB = AB = 1$ en $OB^2 + AB^2 = OA^2$ 1
- Hieruit volgt $a = OA = \sqrt{2}$ 1
- Invullen in de formule van het vorige onderdeel geeft $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 1
- $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$ 1
- $r = \dfrac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3-2\sqrt{2}$ (dus $p = 3$ en $q = -2$) 1

of

- Er geldt $OB = AB = 1$ en $OB^2 + AB^2 = OA^2$ 1
- Hieruit volgt $a = OA = \sqrt{2}$ 1
- Invullen in de formule van het vorige onderdeel geeft $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 1
- Uit $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = p + q\sqrt{2}$ volgt $\sqrt{2}-1 = \left(p+q\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)$ en dus $\sqrt{2}-1 = (p+q)\sqrt{2} + p + 2q$, waaruit volgt $p+q=1$ en $p+2q=-1$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $p = 3$ en $q = -2$ 1

of

- Er geldt $OB = AB = 1$ en $OB^2 + AB^2 = OA^2$ 1
- Hieruit volgt $a = OA = \sqrt{2}$ 1
- $\dfrac{r}{1} = \dfrac{\sqrt{2}-1-r}{\sqrt{2}}$ (want driehoek *AMD* is gelijkvormig met driehoek *AOB*) 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $p = 3$ en $q = -2$ (of $r = 3-2\sqrt{2}$) 2

of

- Er geldt $OB = AB = 1$ en $OB^2 + AB^2 = OA^2$ 1
- Hieruit volgt $a = OA = \sqrt{2}$ 1
- $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{MD}{MA} = \dfrac{r}{\sqrt{2}-1-r}$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $p = 3$ en $q = -2$ (of $r = 3-2\sqrt{2}$) 2