

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Bal in de sloot

### 1 maximumscore 4

- De gevraagde inhoud  $I$  is  $\pi \int_0^h (f(x))^2 dx$  1
- $\pi \int_0^h (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h (22x - x^2) dx$  1
- Een primitieve van  $22x - x^2$  is  $11x^2 - \frac{1}{3}x^3$  1
- $I = \pi(11h^2 - \frac{1}{3}h^3) = \pi h^2(11 - \frac{1}{3}h)$  1

### 2 maximumscore 3

- Er moet gelden  $\pi h^2(11 - \frac{1}{3}h) = 425$  1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 37 (mm) (of 3,7 cm) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Cirkels in een driehoek

### 3 maximumscore 4

- (Uit de stelling van Pythagoras of met 3-4-5 driehoek volgt)  $AC = 5$  1
- Noem de straal van de cirkel  $x$ , dan  $BP = BQ = x$  1
- $AR = AP = 4 - x$  en  $CR = CQ = 3 - x$  1
- ( $AC = AR + CR$ , dus)  $(4 - x) + (3 - x) = 5$  geeft  $x = 1$  1

of

- (Uit de stelling van Pythagoras of met 3-4-5 driehoek volgt)  $AC = 5$  1
- oppervlakte( $\triangle ABC$ ) = oppervlakte( $\triangle ABM$ ) + oppervlakte( $\triangle BCM$ ) + oppervlakte( $\triangle CAM$ ) 1
- Dit geeft  $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot x + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot x + \frac{1}{2} \cdot CA \cdot x$  1
- $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x$  geeft  $x = 1$  1

### 4 maximumscore 3

- ( $\triangle AUN \sim \triangle APM$ , dus)  $\frac{AU}{AP} = \frac{UN}{PM}$  (of  $\frac{AU}{UN} = \frac{AP}{PM}$ ) 1
- $AP = AB - PB = 4 - 1 = 3$  1
- $\frac{AU}{3} = \frac{r}{1}$  geeft  $AU = 3r$  1

of

- ( $\triangle AUN \sim \triangle NTM$ , dus)  $\frac{AU}{NT} = \frac{UN}{TM}$  1
- $\frac{AU}{3 - AU} = \frac{r}{1 - r}$  1
- De herleiding tot  $AU = 3r$  1

*Opmerking*

*De hierboven genoemde gelijkvormigheden hoeven niet te worden aangetoond.*

### 5 maximumscore 5

- $NT = UP = AB - AU - PB = 4 - 3r - 1 = 3 - 3r$  1
- De stelling van Pythagoras in driehoek  $NTM$  toepassen geeft  $(3 - 3r)^2 + (1 - r)^2 = (1 + r)^2$  (met  $0 < r < 1$ ) 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Het antwoord:  $r \approx 0,52$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Gebroken goniometrische functie

### 6 maximumscore 4

- Er moet gelden:  $1 - 2\cos(a\pi) = 0$ , dus  $\cos(a\pi) = \frac{1}{2}$  1
- Dit geeft  $a\pi = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  of  $a\pi = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$  (met  $k$  geheel) 1
- Dus  $a = \frac{1}{3} + k \cdot 2$  of  $a = -\frac{1}{3} + k \cdot 2$  (met  $k$  geheel) 1
- Voor deze waarden van  $a$  geldt  $\sin(a\pi) \neq 0$  (, dus voor deze waarden van  $a$  is de lijn met vergelijking  $x = \pi$  een verticale asymptoot van de grafiek van  $f_a$ ) 1

*Opmerking*

Als alleen de oplossingen  $\frac{1}{3}$  en  $-\frac{1}{3}$  gevonden zijn, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

### 7 maximumscore 5

- Bewezen moet worden dat  $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = -f_2(\frac{1}{2}\pi + p)$  (voor elke waarde van  $p$ ) 2
- $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = \frac{\sin(\pi - 2p)}{1 - 2\cos(\pi - 2p)}$  en  $f_2(\frac{1}{2}\pi + p) = \frac{\sin(\pi + 2p)}{1 - 2\cos(\pi + 2p)}$  1
- ( $\sin(\pi - 2p) = \sin(2p)$  en  $\sin(\pi + 2p) = -\sin(2p)$ , dus)  
 $\sin(\pi - 2p) = -\sin(\pi + 2p)$  1
- ( $\cos(\pi - 2p) = -\cos(2p)$  en  $\cos(\pi + 2p) = -\cos(2p)$ , dus)  
 $\cos(\pi - 2p) = \cos(\pi + 2p)$  (dus  $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = -f_2(\frac{1}{2}\pi + p)$  voor elke waarde van  $p$ ) 1

*Opmerking*

Als voor  $p$  een waarde is ingevuld, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Boven en onder de lijn door de buigpunten

#### 8 maximumscore 4

- $f_p''(x) = 12x^2 - 12p^2$  1
- Primitiveren geeft  $f_p'(x) = 4x^3 - 12p^2x + a$  (met  $a$  een constante) 2
- Nogmaals primitiveren geeft  $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$  (met  $b$  een constante) (, dus is het gestelde juist) 1

*Opmerking*

Als met differentiëren is aangetoond dat  $f_p''(x) = 12(x-p)(x+p)$  volgt uit  $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$  voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

#### 9 maximumscore 4

- $x^4 - 6x^2 - 8x + 5 = -8x$  geeft  $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$  1
- Dus  $(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0$  1
- Hieruit volgt  $x^2 = 1$  of  $x^2 = 5$  1
- ( $x^2 = 1$  geeft de  $x$ -coördinaten van de buigpunten, dus) de  $x$ -coördinaten van de twee gevraagde snijpunten zijn  $x = -\sqrt{5}$  en  $x = \sqrt{5}$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**10 maximumscore 4**

- De oppervlakte van  $V_2$  is gelijk aan  $\int_{-1}^1 ((x^4 - 6x^2 - 8x + 5) - (-8x)) dx$ ,

dus aan  $\int_{-1}^1 (x^4 - 6x^2 + 5) dx$  1
  - Een primitieve van  $x^4 - 6x^2 + 5$  is  $\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 5x$  1
  - $\left[ \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 5x \right]_{-1}^1 = 6\frac{2}{5}$  1
  - $6\frac{2}{5} = 3\frac{1}{5} + 3\frac{1}{5}$  (dus de gezamenlijke oppervlakte van  $V_1$  en  $V_3$  is gelijk aan de oppervlakte van  $V_2$ ) 1
- of
- Omdat zowel  $V_1$  als  $V_3$  onder de lijn met vergelijking  $y = -8x$  ligt en  $V_2$  erboven, is de bewering juist indien geldt:

$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} ((x^4 - 6x^2 - 8x + 5) - (-8x)) dx = 0$ , dus  $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (x^4 - 6x^2 + 5) dx = 0$  2
  - Een primitieve van  $x^4 - 6x^2 + 5$  is  $\frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 5x$  1
  - $\left[ \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 5x \right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = 0$  (dus de gezamenlijke oppervlakte van  $V_1$  en  $V_3$  is gelijk aan de oppervlakte van  $V_2$ ) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**Vierkant op een driehoek**

**11 maximumscore 4**

- $\vec{OS} = \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{AP} + \vec{AR})$  1
- $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t - 2 \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$  1
- $\vec{AR}$  is het beeld van  $\vec{AP}$  bij een rotatie over  $-90^\circ$ , dus  
 $\vec{AR} = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 - 2 \cos t \end{pmatrix}$  1
- Dus  $\vec{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \cos t - 2 \\ 2 \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 - 2 \cos t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix}$  1

of

- $\vec{OS} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OP}) + \frac{1}{2}\vec{AR}$  2
- $\vec{AR}$  is het beeld van  $\vec{AP}$  bij een rotatie over  $-90^\circ$ , dus  
 $\vec{AR} = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 - 2 \cos t \end{pmatrix}$  1
- Dus  $\vec{OS} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 - 2 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix}$  1

**12 maximumscore 4**

- $\vec{MS} = \vec{OS} - \vec{OM} = \begin{pmatrix} 1 + \cos t + \sin t \\ 1 - \cos t + \sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix}$  1
- $|\vec{MS}| = \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (-\cos t + \sin t)^2}$  1
- Herleiden tot  $|\vec{MS}| = \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)}$  1
- Dus  $|\vec{MS}| = \sqrt{2}$  (dus de afstand van  $S$  tot  $M$  is constant) 1

of

- $S$  moet dan liggen op een cirkel met middelpunt  $M(1, 1)$  en straal  $r$ ;  
deze heeft vergelijking  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$  1
- Substitutie van de coördinaten van punt  $S$  geeft  
 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\cos t + \sin t)^2 + (-\cos t + \sin t)^2$  1
- Herleiden tot  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  1
- Dus  $S$  ligt op een cirkel met middelpunt  $M(1, 1)$  en straal  $\sqrt{2}$  (en dus is de afstand van  $S$  tot  $M$  constant) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Gespiegelde raaklijnen

#### 13 maximumscore 4

- Een vergelijking van het spiegelbeeld van de raaklijn is  $ay + x = b$  1
- Er geldt:  $\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right|}$  1
- Dit geeft  $\cos \alpha = \frac{|2a|}{a^2 + 1}$  1
- Omdat  $a > 0$  geldt  $\cos \alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$  1

#### 14 maximumscore 6

- $\frac{2a}{a^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  1
- Dit geeft  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a^2 - 2a + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$  1
- Deze vergelijking exact oplossen geeft  $a = \sqrt{3}$  of  $a = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  2
- $y = 2x^2$  geeft  $\frac{dy}{dx} = 4x$  1
- $4x = -a$ , dus  $x = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$  of  $x = -\frac{1}{12}\sqrt{3}$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**Grafiek verdeelt rechthoek**

**15 maximumscore 7**

- De grafiek van  $f$  en de lijn met vergelijking  $y = \frac{1}{p}$  snijden elkaar voor  $x = p$  1
  - De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is  $1 + \int_p^{2p} \frac{1}{x} dx$  1
  - Een primitieve van  $\frac{1}{x}$  is  $\ln x$  1
  - De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is  $1 + \ln(2p) - \ln p$  1
  - $1 + \ln(2p) - \ln p = 1 + \ln 2 + \ln p - \ln p = 1 + \ln 2$  1
  - (of:  $1 + \ln(2p) - \ln p (= 1 + \ln(\frac{2p}{p})) = 1 + \ln 2$ ) 1
  - De oppervlakte van de rechthoek is  $2p \cdot \frac{1}{p} = 2$  1
  - De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is  $1 - \ln 2$  (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van  $p$ ) 1
- of
- De grafiek van  $f$  en de lijn met vergelijking  $y = \frac{1}{p}$  snijden elkaar voor  $x = p$  1
  - De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is  $\int_p^{2p} (\frac{1}{p} - \frac{1}{x}) dx$  1
  - Een primitieve van  $\frac{1}{p} - \frac{1}{x}$  is  $\frac{1}{p}x - \ln x$  1
  - De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is  $1 - \ln(2p) + \ln p$  1
  - $1 - \ln(2p) + \ln p = 1 - \ln 2 - \ln p + \ln p = 1 - \ln 2$  1
  - (of:  $1 - \ln(2p) + \ln p (= 1 - \ln(\frac{2p}{p})) = 1 - \ln 2$ ) 1
  - De oppervlakte van de rechthoek is  $2p \cdot \frac{1}{p} = 2$  1
  - De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is  $1 + \ln 2$  (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van  $p$ ) 1



Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### De ideale stoothoek

---

**16 maximumscore 3**

- $x'(t) = 8,4$  en  $y'(t) = 11,2 - 9,8t$  1
- $x'(0) = 8,4$  en  $y'(0) = 11,2$  1
- De snelheid op tijdstip  $t = 0$  is  $\sqrt{8,4^2 + 11,2^2} = 14,0$  (of 14) (m/s) 1

**17 maximumscore 3**

- Er moet gelden:  $r = 20 \cos \alpha \left( \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 0,1 \cdot 1,85} \right)$  is maximaal 1
- Beschrijven hoe hieruit  $\alpha$  gevonden kan worden 1
- Het antwoord 0,74 (rad) (of  $43^\circ$ ) (of nauwkeuriger) 1

Vraag	Antwoord	Scores
<b>18</b>	<b>maximumscore 6</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Als <math>h = 0</math> dan <math>r = 20 \cos \alpha (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha})</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>\sin \alpha &gt; 0</math>, dus) <math>20 \cos \alpha (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha}) = 40 \cos \alpha \sin \alpha</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{dr}{d\alpha} = 40 \cos^2 \alpha - 40 \sin^2 \alpha</math></li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{dr}{d\alpha} = 0</math> geeft <math>\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>0 &lt; \alpha &lt; \frac{1}{2}\pi</math>, dus) het antwoord is <math>\frac{1}{4}\pi</math> (rad) (of <math>45^\circ</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Als <math>h = 0</math> dan <math>r = 20 \cos \alpha (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha})</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>\sin \alpha &gt; 0</math>, dus) <math>20 \cos \alpha (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha}) = 40 \cos \alpha \sin \alpha</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>40 \cos \alpha \sin \alpha = 20 \sin(2\alpha)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{dr}{d\alpha} = 20 \cdot 2 \cdot \cos(2\alpha)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{dr}{d\alpha} = 0</math> geeft <math>\cos(2\alpha) = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>0 &lt; \alpha &lt; \frac{1}{2}\pi</math>, dus) het antwoord is <math>\frac{1}{4}\pi</math> (rad) (of <math>45^\circ</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Als <math>h = 0</math> dan <math>r = 20 \cos \alpha (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha})</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>\sin \alpha &gt; 0</math>, dus) <math>20 \cos \alpha (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha}) = 40 \cos \alpha \sin \alpha</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>40 \cos \alpha \sin \alpha = 20 \sin(2\alpha)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>r</math> is maximaal als <math>\sin(2\alpha)</math> maximaal is</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>0 &lt; \alpha &lt; \frac{1}{2}\pi</math>, dus) <math>\sin(2\alpha)</math> is maximaal als <math>2\alpha = \frac{1}{2}\pi</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Het antwoord: <math>\frac{1}{4}\pi</math> (rad) (of <math>45^\circ</math>)</li> </ul>	1