Formules

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u) \qquad \sin(t)+\sin(u)=2\sin\left(\tfrac{t+u}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t-u}{2}\right)$$

$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u) \qquad \sin(t)-\sin(u)=2\sin\left(\tfrac{t-u}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t+u}{2}\right)$$

$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u) \qquad \cos(t)+\cos(u)=2\cos\left(\tfrac{t+u}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t-u}{2}\right)$$

$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u) \qquad \cos(t)-\cos(u)=-2\sin\left(\tfrac{t+u}{2}\right)\sin\left(\tfrac{t-u}{2}\right)$$

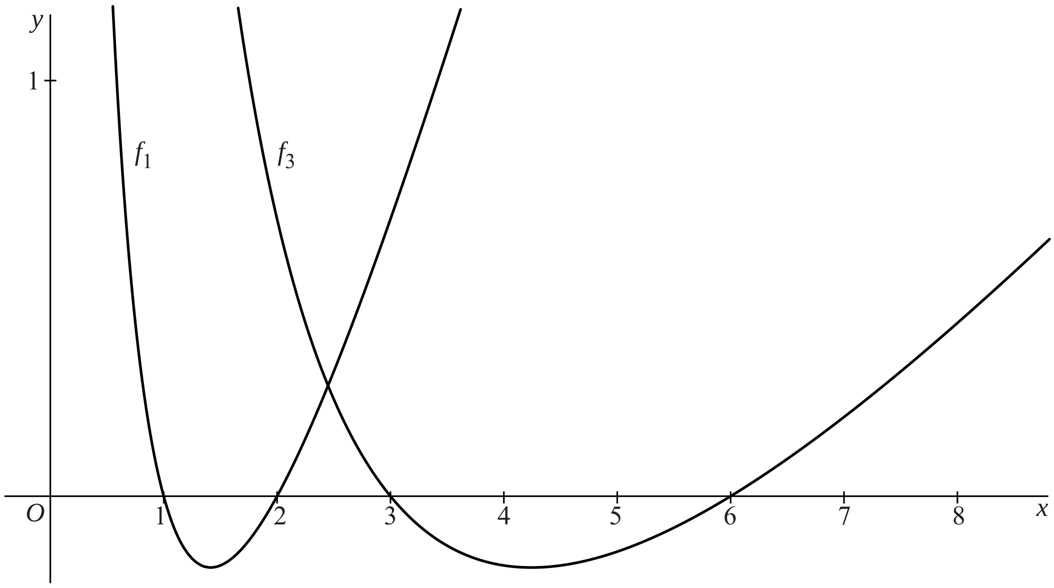
Een familie van gebroken functies

Voor elke positieve waarde van a is de functie f_a met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ gegeven door

$$f_a(x) = \frac{x}{a} + \frac{2a}{x} - 3$$

De grafieken van f_1 en f_3 zijn in onderstaande figuur getekend.

figuur



De grafieken van f_1 en f_3 snijden elkaar in één punt.

3p **1** Bereken exact de x-coördinaat van dit punt.

De grafiek van f_1 snijdt de x-as in de punten $(1, 0)$ en $(2, 0)$. De grafiek van f_1 en de x-as sluiten een vlakdeel in.

5p **2** Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.

Voor elke waarde van a, met $a > 0$, heeft de grafiek van f_a één top.

4p **3** Bewijs dat al deze toppen dezelfde y-coördinaat hebben.

Het klimmen van een vliegtuig

Een vliegtuig komt los van de grond en 'klimt' zo snel mogelijk. Naarmate het toestel hoger komt, wordt de lucht ijler. Hierdoor wordt het steeds moeilijker om hoger te komen. Op zekere hoogte is het niet meer mogelijk om verder te klimmen. Deze maximale hoogte wordt het **absolute plafond** genoemd.

In deze opgave gebruiken we het volgende model van de hoogte van een eenmotorig vliegtuig op een bepaald moment:

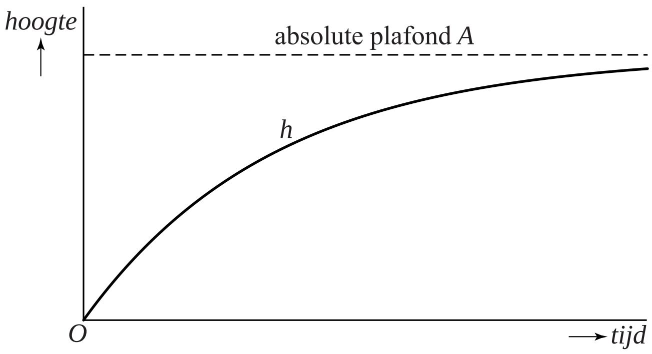
$$h(t) = A\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{k}}\right)$$

Hierin is:
- t de tijd in minuten vanaf het moment dat het vliegtuig los van de grond komt;
- $h(t)$ de hoogte in ft[1] na t minuten;
- A het absolute plafond in ft;
- k een positieve constante.

De waarden van A en k zijn afhankelijk van het type vliegtuig.

In de figuur is een globale grafiek van h weergegeven.

figuur



Een vliegtuig voert een testvlucht uit. Om het absolute plafond te bepalen wordt tijdens het klimmen op verschillende tijdstippen de hoogte bepaald. Na 10 minuten klimmen is de hoogte 10 760 ft. Na 20 minuten klimmen is de hoogte 16 650 ft. Met deze gegevens kan het absolute plafond van dit vliegtuig worden berekend.

4p **4** Bereken het absolute plafond van dit vliegtuig in ft. Rond je antwoord af op honderden ft.

Van een ander vliegtuig is bekend dat $k = 13{,}6$.

4p **5** Bereken hoelang na het opstarten dit vliegtuig zich op de helft van zijn absolute plafond bevindt. Rond je eindantwoord af op hele seconden.

noot 1 1 ft is één Engelse voet; 1 ft = 30,48 cm

Het zou veel vermogen van de motor vragen wanneer een vliegtuig op of vlak onder het absolute plafond zou vliegen. Er blijft dan te weinig vermogen over om zijwaarts te kunnen manoeuvreren. Daarom is de hoogte waarop een vliegtuig in de praktijk vluchten maakt, lager dan het absolute plafond.

Een vliegtuig vliegt meestal op een hoogte die wordt aangeduid als het **praktische plafond** P. Deze hoogte wordt gedefinieerd als de vlieghoogte waarop de klimsnelheid $h'(t)$ gelijk is aan 100 ft per minuut.

Iemand beweert dat P uitgerekend kan worden, uitgaande van de waarden van A en k, met de volgende formule:

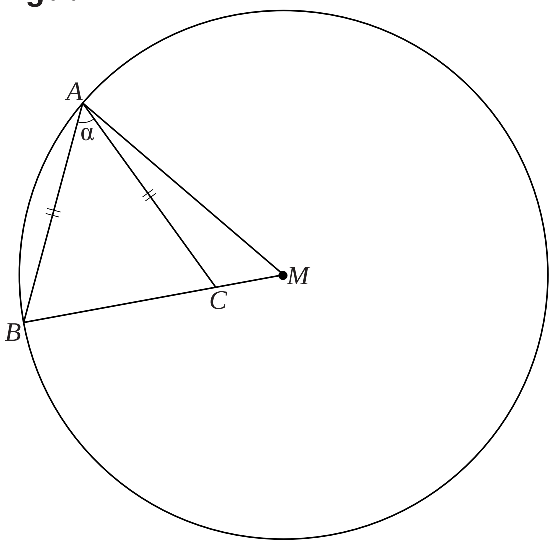
$$P = A - 100k$$

5p **6** Onderzoek of deze bewering juist is.

Stralen en koorden

Gegeven zijn een cirkel met middelpunt M en een koorde AB, met $AB < AM$. Op BM bevindt zich een punt C zo dat $AC = AB$. $\angle BAC$ noemen we α. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1

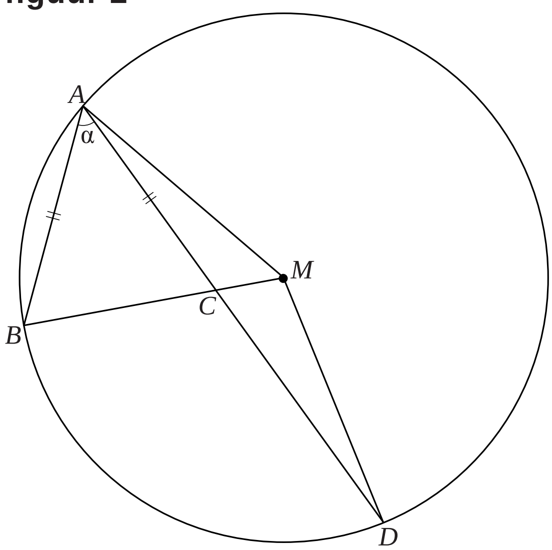


Er geldt: $\angle AMB = \alpha$.

4p **7** Bewijs dit.

In figuur 2 is de situatie van figuur 1 uitgebreid. D is het snijpunt van het verlengde van lijnstuk AC met de cirkel. Ook lijnstuk MD is getekend. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

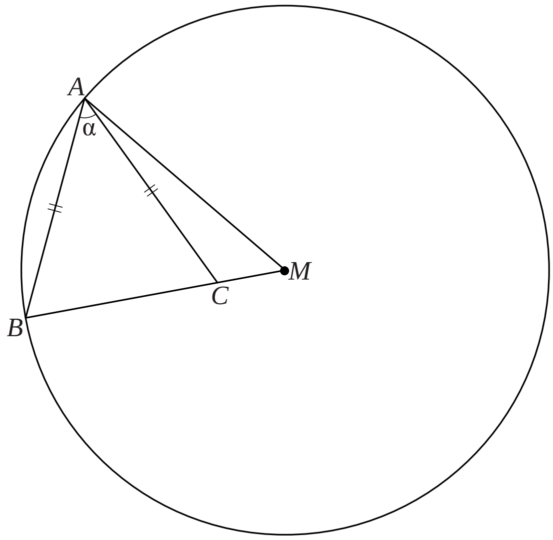
figuur 2



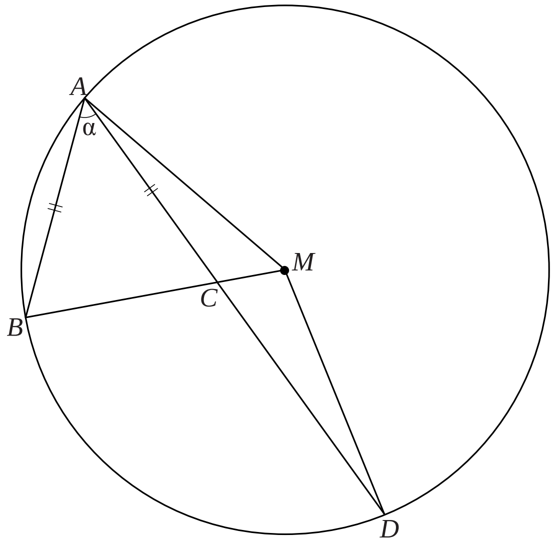
4p **8** Bewijs dat $\angle AMD = 3\alpha$.

uitwerkbijlage

7



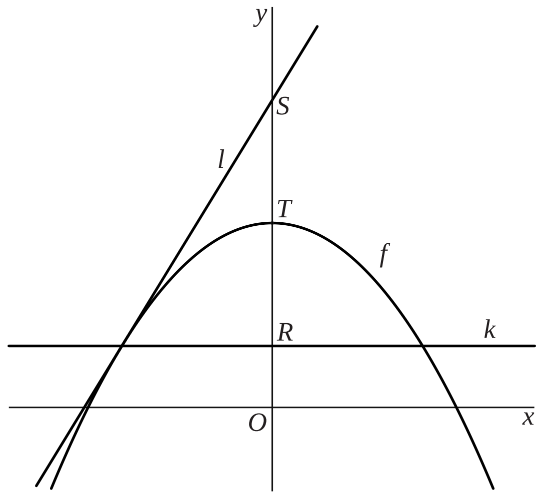
8



Paraboloïde

De functie f is gegeven door
$f(x) = 1 - x^2$.
De grafiek van f is een parabool met top $T(0, 1)$. Verder is gegeven lijn k met vergelijking $y = p$, met $p < 1$. Deze lijn snijdt de y-as in punt R en de parabool in twee punten. Lijn l is de raaklijn aan de parabool in het linker snijpunt. Deze lijn snijdt de y-as in punt S.
Zie figuur 1.

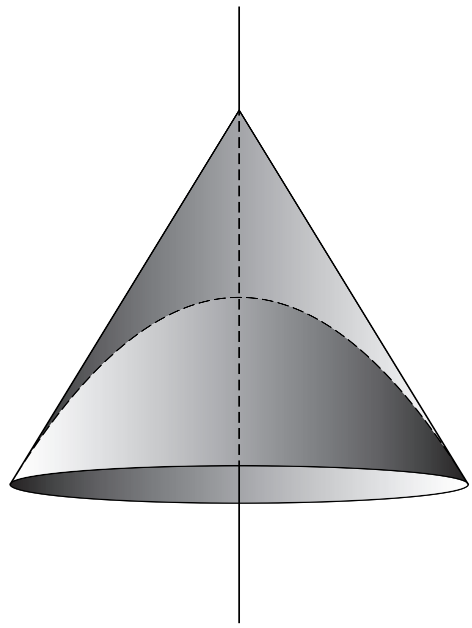
figuur 1



6p **9** Bewijs dat T het midden is van lijnstuk RS.

Het gebied, begrensd door lijn k, raaklijn l en de y-as, wordt gewenteld om de y-as. Zo ontstaat een kegel. De inhoud van deze kegel is $\frac{2}{3}\pi(p-1)^2$.
Het gedeelte van de parabool dat zich boven de lijn k bevindt, wordt ook om de y-as gewenteld. Zo ontstaat een zogenaamde paraboloïde. Zie figuur 2.

figuur 2



De verhouding van de inhoud van de paraboloïde en de inhoud van de kegel is onafhankelijk van p.

6p **10** Bewijs dit.

Park-A-Kid

Een Park-A-Kid is een hekwerk dat dient ter bescherming van baby's en peuters. Het kan op verschillende plekken in huis worden neergezet. Zie de foto. Het hekwerk ontstaat door meerdere hekjes aan elkaar te bevestigen. Elk hekje is 60 cm breed.

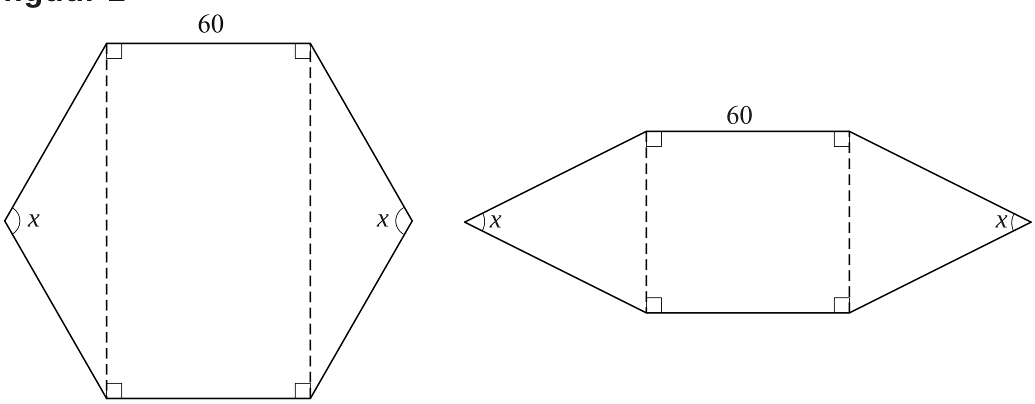
foto

Een standaard Park-A-Kid bestaat uit zes hekjes. Door de hekjes aan elkaar te bevestigen en ten slotte het einde van het laatste hekje te bevestigen aan het begin van het eerste hekje, ontstaat een box waar een peuter niet zelfstandig uit kan. Zie figuur 1. Als elke twee aan elkaar bevestigde hekjes niet in elkaars verlengde staan, heeft het bovenaanzicht de vorm van een zeshoek.

figuur 1

We bekijken opstellingen waarbij deze zeshoek kan worden verdeeld in een rechthoek en twee gelijkbenige driehoeken die tegen twee overstaande zijden van de rechthoek aan liggen. De driehoeken hebben tophoek x (in radialen) met $0 < x < \pi$. In figuur 2 zijn twee mogelijkheden getekend.

figuur 2



Voor de oppervlakte A (in cm^2) van dergelijke zeshoeken geldt:

$$A(x) = 7200\sin(\tfrac{1}{2}x) + 3600\sin(x)$$

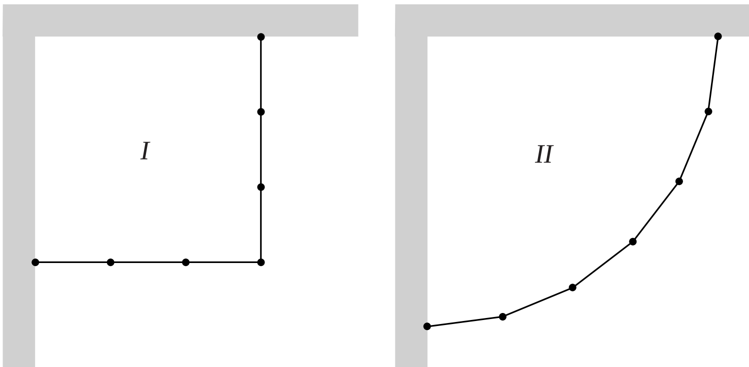
5p **11** Bewijs dat deze formule juist is.

De oppervlakte van zo'n zeshoek als hiervoor is maximaal voor een zekere waarde van x.

5p **12** Bereken exact voor welke waarde van x de oppervlakte maximaal is.

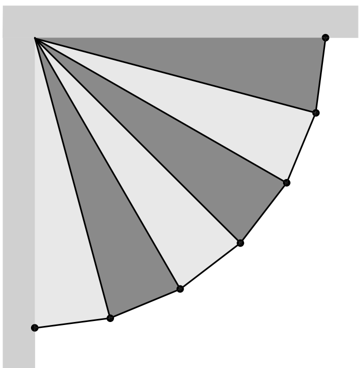
In de rest van deze opgave bekijken we opstellingen waarbij de zes hekjes van een standaard Park-A-Kid worden gebruikt om een afzetting te maken in een rechte hoek van een kamer. Door ook de muren van de kamer te benutten, kan een groot grondvlak worden verkregen. Er zijn meerdere opstellingen mogelijk. In figuur 3 zijn twee mogelijkheden in bovenaanzicht weergegeven.

figuur 3



Bij opstelling I is het grondvlak een vierkant. Bij opstelling II is het grondvlak te verdelen in zes gelijkbenige congruente driehoeken, zoals in figuur 4 is weergegeven.

figuur 4



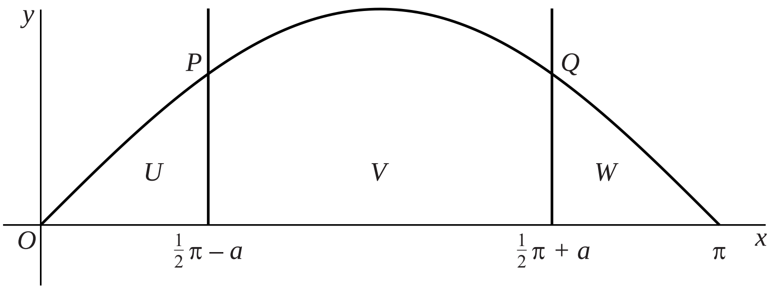
Bij opstelling II is de oppervlakte van het grondvlak groter dan bij opstelling I.

6p **13** Bereken het verschil van de twee oppervlaktes. Rond je eindantwoord af op een geheel aantal cm^2.

In drieën

Voor $0 \leq x \leq \pi$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sin(x)$.
De lijnen met vergelijking $x = \frac{1}{2}\pi - a$ en $x = \frac{1}{2}\pi + a$, met $0 < a < \frac{1}{2}\pi$, snijden de grafiek van f in de punten P en Q. Zie de figuur.
Het vlakdeel dat wordt ingesloten door de x-as en de grafiek van f wordt door de twee lijnen in drie delen verdeeld. In de figuur zijn deze drie delen aangegeven met U, V en W.

figuur



Vanwege de lijnsymmetrie van de sinusgrafiek hebben U en W gelijke oppervlakte voor elke waarde van a.

Er is een waarde van a waarvoor U, W én V gelijke oppervlakte hebben.

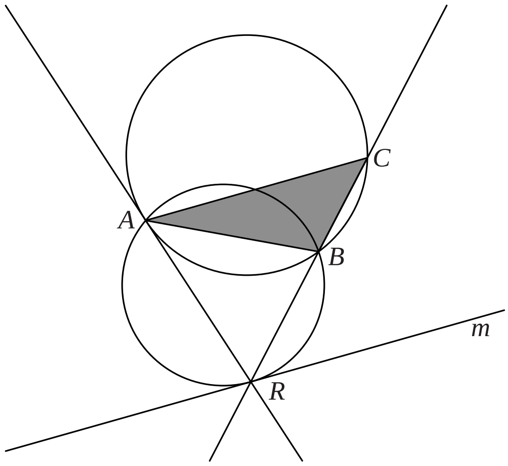
7p **14** Bereken in dat geval de y-coördinaat van P en Q. Rond je eindantwoord af op twee decimalen.

Evenwijdig

Gegeven is een driehoek ABC, waarin $\angle B$ groter is dan $\angle C$. Hierop passen we de volgende constructie toe:

- we tekenen de omgeschreven cirkel van driehoek ABC;
- we tekenen de raaklijn in A aan de omgeschreven cirkel van driehoek ABC;
- het snijpunt van deze raaklijn met het verlengde van BC noemen we R;
- we tekenen de omgeschreven cirkel van driehoek ABR;
- we tekenen de raaklijn m in R aan deze omgeschreven cirkel.

figuur 1

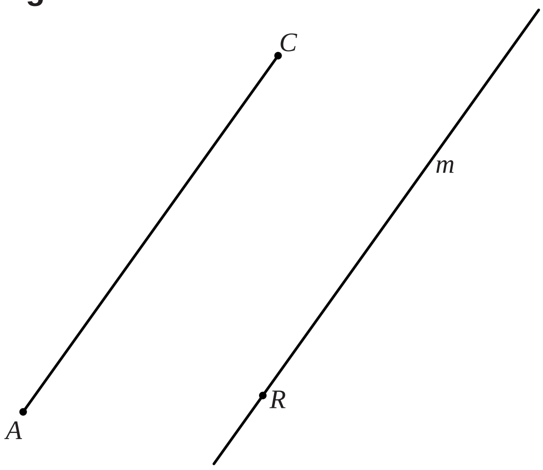


Het eindresultaat van deze constructie staat in figuur 1. Deze figuur staat vergroot ook op de uitwerkbijlage.
Er geldt dat lijn m evenwijdig is aan lijn AC.

4p **15** Bewijs dat lijn m inderdaad evenwijdig is aan lijn AC.

In figuur 2 is voor een driehoek ABC de hierboven beschreven constructie toegepast. Van de driehoek is alleen zijde AC gegeven. Bovendien is het resultaat van de constructie gegeven: de lijn m met daarop punt R.
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

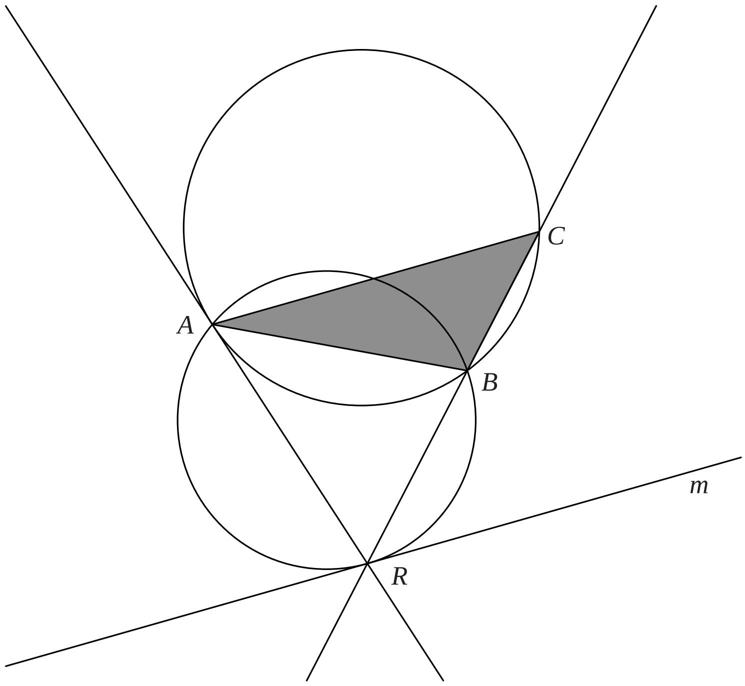
figuur 2



3p **16** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage punt B. Licht je werkwijze toe.

uitwerkbijlage

15



16