Vraag	Antwoord	Scores

Twee machten van 2

1 maximumscore 5

- $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + \ln(2) \cdot 2^{-2x} \cdot -2$ 2
- Uit $f'(x) = 0$ volgt dat $2^x = 2 \cdot 2^{-2x}$ 1
- Dus $2^{3x} = 2$ (of $2^x = 2^{-2x+1}$) 1
- Hieruit volgt $x = \frac{1}{3}$ 1

2 maximumscore 5

- Een primitieve van 2^x is $\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x$ 1
- Een primitieve van 2^{-2x} is $\frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{-2x} \cdot \frac{1}{-2}$ 1
- De oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as is $\left(\frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{8\ln(2)}\right) - \left(\frac{1}{2\ln(2)} - \frac{4}{2\ln(2)}\right)$ ($\approx 4{,}869$) 2
- De oppervlakte van het rechthoekige gebied is $2k$, dus de gevraagde waarde van k is 2,43 1

Vraag	Antwoord	Scores

De stelling van Ptolemaeus

3 maximumscore 4

- $\angle ABC = 180° - \angle ADC$; *koordenvierhoek* 1
- $\angle ABC = 180° - \angle CBP$; *gestrekte hoek* 1
- Dus $\angle ADC = \angle CBP$ 1
- (Ook geldt $\angle ACD = \angle PCB$, dus) $\Delta ACD \sim \Delta PCB$; *hh* 1

4 maximumscore 4

- $\angle CAB = \angle CDB$; *constante hoek* 1
- $\angle DCB = \angle ACD + \angle ACB$ en $\angle ACP = \angle ACB + \angle PCB$ 1
- Wegens $\angle ACD = \angle PCB$ geldt $\angle DCB = \angle ACP$ 1
- Dus $\Delta BCD \sim \Delta PCA$; *hh* 1

of

- $\angle CBD = \angle CAD$; *constante hoek* 1
- Uit de vorige vraag volgt $\angle CAD = \angle CPB$, dus $\angle CBD = \angle CPB$ 1
- $\angle CDB = \angle CAB$; *constante hoek* 1
- Dus $\Delta BCD \sim \Delta PCA$; *hh* 1

5 maximumscore 4

- Uit $\Delta ACD \sim \Delta PCB$ volgt $BP \cdot CD = AD \cdot BC$ 1
- Hieruit volgt $BP = \dfrac{AD \cdot BC}{CD}$ en uit de gegeven uitdrukking volgt
  $AP = \dfrac{AC \cdot BD}{CD}$ 1
- $AP = AB + BP$, dus $\dfrac{AC \cdot BD}{CD} = AB + \dfrac{AD \cdot BC}{CD}$ 1
- Dit geeft $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ 1

of

- Uit $\Delta ACD \sim \Delta PCB$ volgt $BP \cdot CD = AD \cdot BC$ 1
- (Wegens $AP \cdot CD = AC \cdot BD$ en $AP = AB + BP$ geldt)
  $AC \cdot BD = (AB + BP) \cdot CD$ 1
- Dit geeft $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BP \cdot CD$ 1
- Wegens $BP \cdot CD = AD \cdot BC$ geeft dit $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ 1

of

- Uit $\Delta ACD \sim \Delta PCB$ volgt $BP \cdot CD = AD \cdot BC$ 1
- (Wegens $AP \cdot CD = AC \cdot BD$ geldt)
  $AP \cdot CD - BP \cdot CD = AC \cdot BD - AD \cdot BC$ 1
- Het linkerlid is gelijk aan $(AP - BP) \cdot CD = AB \cdot CD$ 1
- Samen geeft dit $AB \cdot CD = AC \cdot BD - AD \cdot BC$, dus
  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Straal van een waterstraal

6 maximumscore 5

- Er geldt $v^2 = v_0{}^2 + 2gh_0 - 2gh$ (uit formule 1) 1
- Dit is gelijk aan $v_0{}^2 + 2g(h_0 - h) = v_0{}^2 + 2gx$ 1
- Ook geldt $r^2 = r_0{}^2 \cdot \frac{v_0}{v}$ (uit formule 2) 1
- Combineren geeft $r^2 = r_0{}^2 \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0{}^2 + 2gx}}$ 1
- $r^2 = r_0{}^2 \cdot \sqrt{\frac{v_0{}^2}{v_0{}^2 + 2gx}}$ dus (omdat r en r_0 beide positief zijn)

  $r = r_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{v_0{}^2}{v_0{}^2 + 2gx}}$ 1

of

- Er geldt $v^2 = v_0{}^2 + 2gh_0 - 2gh$ (uit formule 1) 1
- Dit is gelijk aan $v_0{}^2 + 2g(h_0 - h) = v_0{}^2 + 2gx$ 1
- Uit formule 2 volgt $r_0{}^4 \cdot v_0{}^2 = r^4 \cdot v^2$ en dus $r^4 = \frac{r_0{}^4 \cdot v_0{}^2}{v^2}$ 1
- Dit combineren met $v^2 = v_0{}^2 + 2gx$ geeft $r^4 = r_0{}^4 \cdot \frac{v_0{}^2}{v_0{}^2 + 2gx}$ 1
- Dan (omdat r en r_0 beide positief zijn) volgt $r = r_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{v_0{}^2}{v_0{}^2 + 2gx}}$ 1

7 maximumscore 5

- De inhoud is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^{0,3} r^2 \, dx$ 1
- $r = 0,01 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,5^2}{0,5^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot x}}$ 1
- Beschrijven hoe $\pi \cdot \int_0^{0,3} \left(0,01 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,5^2}{0,5^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot x}}\right)^2 dx$ berekend kan worden 1
- Dit geeft $3,2 \cdot 10^{-5}$ (m^3) 1
- Het antwoord 32 (cm^3) (of 0,000032 m^3) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Sinus en het kwadraat van sinus

8 maximumscore 5

- De oppervlakte van V is $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\sin(x)-\sin^2(x)\right)\,dx$ 1
- Een primitieve van $\sin(x)$ is $-\cos(x)$ 1
- ($\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$, dus) een primitieve van $\sin^2(x)$ is $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)$ 2
- $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\sin(x)-\sin^2(x)\right)\,dx=\left[-\cos(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=1-\frac{1}{4}\pi$ 1

of

- Een primitieve van $\sin(x)$ is $-\cos(x)$ 1
- $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin(x)\,dx=-\cos(\frac{1}{2}\pi)+\cos(0)=1$ 1
- (De grafiek van g is puntsymmetrisch in $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2})$ dus) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}g(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 1=\frac{1}{4}\pi$ 2
- Dus de oppervlakte van V is $1-\frac{1}{4}\pi$ 1

9 maximumscore 6

- De lengte van lijnstuk AB is $\sin(p)-\sin^2(p)$ 1
- De afgeleide van $\sin(p)-\sin^2(p)$ is $\cos(p)-2\sin(p)\cos(p)$ 2
- $\cos(p)-2\sin(p)\cos(p)=0$ geeft $\cos(p)=0$ of $1-2\sin(p)=0$ 1
- AB is maximaal als $\sin(p)=\frac{1}{2}$ (voor $\cos(p)=0$ is AB minimaal) 1
- Het antwoord: $\frac{1}{4}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

De vergelijking van Arrhenius

10 maximumscore 4

- Uit de vergelijking van Arrhenius volgt $\frac{k}{A} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}$ 1
- $-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right) = \ln\left(\frac{k}{A}\right)$ 1
- $\frac{E}{8{,}314T} = -\ln\left(\frac{k}{A}\right)$ $\left(= \ln\left(\left(\frac{k}{A}\right)^{-1}\right)\right)$ $= \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ 1
- Dus $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ 1

of

- Uit de vergelijking van Arrhenius volgt $\ln(k) = \ln\left(A \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}\right)$ 1
- $\ln(k) = \ln(A) - \frac{E}{8{,}314T}$ 1
- $\frac{E}{8{,}314T} = \ln(A) - \ln(k) = \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ 1
- Dus $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ 1

of

- Als $E = 8{,}314T \cdot \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ dan moet gelden $\frac{E}{8{,}314T} = \ln\left(\frac{A}{k}\right)$ 1
- Dan is $\frac{E}{8{,}314T} = \ln(A) - \ln(k)$ 1
- Dus $\ln(k) = \ln(A) + \frac{-E}{8{,}314T} = \ln(A) + \ln\left(\mathrm{e}^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}\right)$ 1
- Dus $\ln(k) = \ln\left(A \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{E}{8{,}314T}\right)}\right)$ (en dat komt overeen met de gegeven formule) 1

Vraag	Antwoord	Scores

11 maximumscore 3

- Er moet gelden $8,314 \cdot 500 \cdot \ln\left(\dfrac{A}{2,7 \cdot 10^{-2}}\right) = 8,314 \cdot 550 \cdot \ln\left(\dfrac{A}{2,4 \cdot 10^{-1}}\right)$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- De gevraagde waarde van E is $1,0 \cdot 10^5$ (J/mol) 1

of

- $2,7 \cdot 10^{-2} = A \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{E}{8,314 \cdot 500}\right)}$ en $2,4 \cdot 10^{-1} = A \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{E}{8,314 \cdot 550}\right)}$ dus $\dfrac{2,7 \cdot 10^{-2}}{2,4 \cdot 10^{-1}} = \mathrm{e}^{\frac{-E}{8,314 \cdot 500}} : \mathrm{e}^{\frac{-E}{8,314 \cdot 550}}$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- De gevraagde waarde van E is $1,0 \cdot 10^5$ (J/mol) 1

Op een cirkel

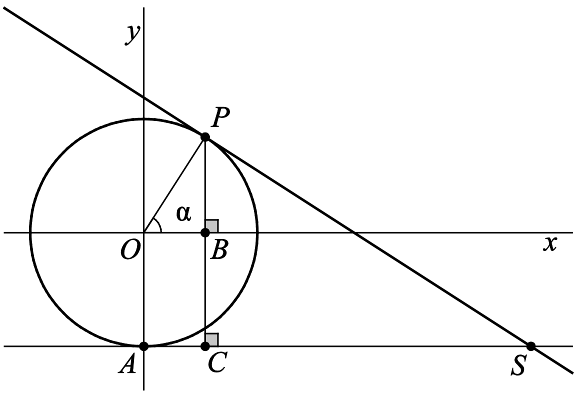
12 maximumscore 7

- $-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P 1
- Een vergelijking van de raaklijn in P is $y - \sin(\alpha) = -\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cdot (x - \cos(\alpha))$ 2
- Snijden met de raaklijn in A geeft $-1 - \sin(\alpha) = -\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cdot (x - \cos(\alpha))$ 1
- $-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} x = -1 - \sin(\alpha) - \dfrac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{-\sin(\alpha) - \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{-\sin(\alpha) - 1}{\sin(\alpha)}$ 2
- $x = \dfrac{-\sin(\alpha) - 1}{\sin(\alpha)} \cdot -\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{1 + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- De loodlijn vanuit P op de x-as snijdt de x-as in B en lijn AS in C, dan zijn de driehoeken OBP en PCS gelijkvormig (want (wegens $\angle OPB + \angle CPS = 90°$; *raaklijn* en $\angle CSP + \angle CPS = 90°$; *hoekensom driehoek* geldt) $\angle OPB = \angle CSP$ en $\angle OBP = \angle PCS$; *hh*) — 2
- Dus $\frac{CS}{BP} = \frac{PC}{OB}$ — 1
- Dit geeft $\frac{CS}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)+1}{\cos(\alpha)}$ — 1
- $CS = \frac{\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ — 1
- Voor de x-coördinaat van S geldt $x = \cos(\alpha) + \frac{\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ — 1
- $x = \frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ — 1



of

- De driehoeken OAS en OPS zijn congruent ($OP = OA$; $\angle OAS = \angle OPS = 90°$; $OS = OS$; *ZZR*) en dus $SA = SP$ — 1
- Dus voor de x-coördinaat van S geldt $x = \sqrt{(x-\cos(\alpha))^2 + (1+\sin(\alpha))^2}$ — 2
- Dit geeft $x^2 = x^2 - 2x\cdot\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + 1 + 2\sin(\alpha) + \sin^2(\alpha)$ — 2
- Hieruit volgt $2x\cdot\cos(\alpha) = 2 + 2\sin(\alpha)$ — 1
- Dus $x = \frac{2+2\sin(\alpha)}{2\cos(\alpha)} = \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

13 **maximumscore 8**

- (De coördinaten van Q zijn $(-\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, dus) $PQ = 2\cos(\alpha)$ — 1
- $AS = \dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ dus uit $AS = PQ$ volgt $\dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\cos(\alpha)$ — 1
- Dit herleiden tot $2\sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 1 = 0$ — 1
- $(2\sin(\alpha)-1)(\sin(\alpha)+1) = 0$ geeft $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ of $\sin(\alpha) = -1$ — 1
- Dan volgt (omdat $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ — 1
- $AS = PQ = (2 \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) =)\ \sqrt{3}$ — 1
- $Q\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ en $A(0, -1)$ dus $AQ = \sqrt{3}$ — 1
- (AS en PQ zijn evenwijdig en even lang, dus $AQ = PS$ en dus) de omtrek van $ASPQ$ is $4\sqrt{3}$ — 1

of

- (De coördinaten van Q zijn $(-\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, dus) de richtingscoëfficiënt van AQ is $\dfrac{\sin(\alpha)+1}{-\cos(\alpha)}$ en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P is $-\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ — 1
- (De lijnstukken PQ en AS zijn evenwijdig en even lang, dus lijnstuk AQ is evenwijdig aan de raaklijn aan de cirkel in P ofwel) $\dfrac{\sin(\alpha)+1}{-\cos(\alpha)} = \dfrac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ — 1
- Dit herleiden tot $2\sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 1 = 0$ — 1
- $(2\sin(\alpha)-1)(\sin(\alpha)+1) = 0$ geeft $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ of $\sin(\alpha) = -1$ — 1
- Dan volgt (omdat $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ — 1
- $AS = PQ = (2 \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) =)\ \sqrt{3}$ — 1
- $Q\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ en $A(0, -1)$ dus $AQ = \sqrt{3}$ — 1
- (AS en PQ zijn evenwijdig en even lang, dus $AQ = PS$ en dus) de omtrek van $ASPQ$ is $4\sqrt{3}$ — 1

Opmerking
Als bij de beantwoording van deze vraag gebruik is gemaakt van de raaklijneigenschap (dus $PS = AS$) zonder deze expliciet te noemen, hiervoor 1 scorepunt in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores

Middelloodlijn en koordenvierhoek

14 maximumscore 6

- $\angle ACS\ (= \angle ACB) = \frac{1}{2}\angle AMB$; *omtrekshoek* 1
- $AR = BR$ en $\angle ARM = \angle BRM\ (= 90°)$; *middelloodlijn* 1
- ($MR = MR$,) dus $\Delta AMR \cong \Delta BMR$; *ZHZ* 1
- Hieruit volgt $\angle AMR = \angle BMR$, dus $\angle AMR = \frac{1}{2}\angle AMB$ 1
- $\angle AMS = 180° - \angle AMR$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle ACS + \angle AMS = \frac{1}{2}\angle AMB + 180° - \frac{1}{2}\angle AMB = 180°$ dus $AMSC$ is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1

of

- $\angle ACS\ (= \angle ACB) = \frac{1}{2}\angle AMB$; *omtrekshoek* 1
- $AM = BM$; *middelloodlijn* of *straal* 1
- $\angle ARM = \angle BRM = 90°$ (en $MR = MR$), dus $\Delta AMR \cong \Delta BMR$; *ZZR* 1
- Hieruit volgt $\angle AMR = \angle BMR$, dus $\angle AMR = \frac{1}{2}\angle AMB$ 1
- $\angle AMS = 180° - \angle AMR$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle ACS + \angle AMS = \frac{1}{2}\angle AMB + 180° - \frac{1}{2}\angle AMB = 180°$ dus $AMSC$ is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1

of

- $AM = CM$, dus $\angle MAC = \angle MCA$; *cirkel, gelijkbenige driehoek* 1
- $\angle AMC = 180° - 2\angle MAC$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AMC$; *omtrekshoek* 1
- Dus $\angle MAC = 90° - \frac{1}{2}\angle AMC = 90° - \angle ABC$ 1
- $\angle MSC (= \angle RSC) = \angle BRS + \angle RBS = 90° + \angle ABC$; *buitenhoek driehoek, middelloodlijn* 1
- $\angle MAC + \angle MSC = 180°$ dus $AMSC$ is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1

of

- $\angle ACS\ (= \angle ACB) = \frac{1}{2}\angle AMB$; *omtrekshoek* 1
- $AM = BM$; *middelloodlijn* of *straal* 1
- ($MR = MR$ en) $AR = BR$ dus $\Delta AMR \cong \Delta BMR$; *ZZZ* 1
- $\angle AMB = 180° - 2 \cdot \angle MAB$, dus $\angle ACS = 90° - \angle MAB$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle AMS = \angle ARM + \angle RAM = 90° + \angle RAM$ $(= 90° + \angle BAM)$; *buitenhoek driehoek* 1
- $\angle ACS + \angle AMS = 90° - \angle MAB + 90° + \angle BAM = 180°$ dus $AMSC$ is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Het verlengde van AM snijdt de cirkel in een punt D, dan is AD een middellijn 1
- $\angle ABD = 90^\circ$; *Thales* 1
- $\angle ADB = \angle AMR$; *F-hoeken* 1
- $\angle AMR + \angle AMS = 180^\circ$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle ADB = \angle ACB\ (= \angle ACS)$; *constante hoek* 1
- $\angle ACS + \angle AMS = 180^\circ$ dus $AMSC$ is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1