Formules

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

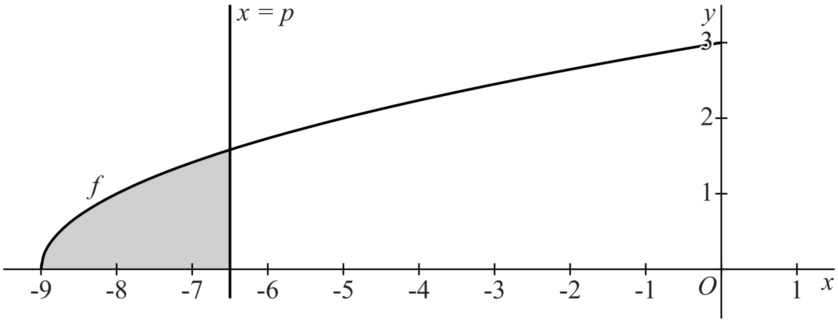
$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$
$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin t + \sin u = 2\sin\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$
$$\sin t - \sin u = 2\sin\tfrac{t-u}{2}\cos\tfrac{t+u}{2}$$
$$\cos t + \cos u = 2\cos\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$
$$\cos t - \cos u = -2\sin\tfrac{t+u}{2}\sin\tfrac{t-u}{2}$$

Het achtste deel

Op het domein $[-9,0]$ is de functie f gegeven door $f(x)=\sqrt{x+9}$.
In de figuur is de grafiek van f getekend en een lijn met vergelijking $x=p$ met $-9<p\leq 0$.
Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en deze lijn is met grijs aangegeven.

figuur



De oppervlakte van het grijze gebied noemen we A. De waarde van A hangt af van de waarde van p. Er geldt:

$$A(p)=\tfrac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$$

4p **1** Bewijs dat $A(p)=\tfrac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$.

Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ het achtste deel is van de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.

5p **2** Bereken exact deze waarde van p.

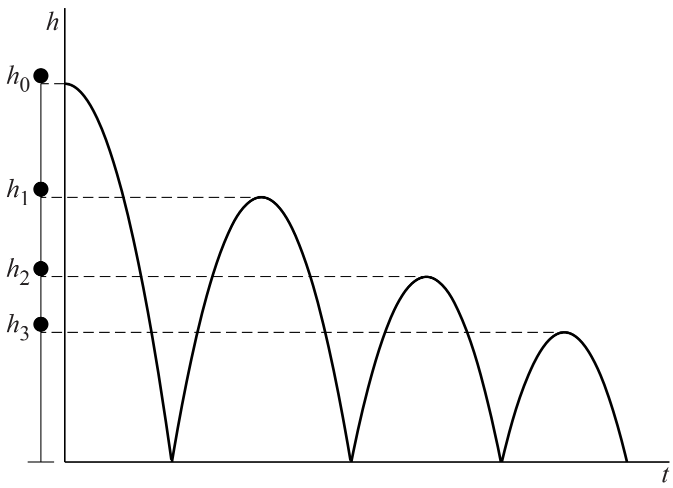
Stuiterende bal

Een bal wordt vanaf een bepaalde hoogte boven een vloer losgelaten en begint vervolgens te stuiteren. In deze opgave bekijken we een wiskundig model van deze situatie.

Op het moment van loslaten bevindt de onderkant van de bal zich h_0 meter boven de vloer. De maximale hoogte van de onderkant van de bal tussen twee keer stuiteren noemen we de **stuithoogte**. De stuithoogte na de eerste keer stuiteren noemen we h_1, die na de tweede keer stuiteren h_2, enzovoort.

Aan de linkerkant van figuur 1 is de bal getekend op verschillende stuithoogtes. Rechts daarvan is de hoogte h van de stuiterende bal (in meters) uitgezet tegen de tijd t (in seconden).

figuur 1



In deze opgave gaan we ervan uit dat de verhouding tussen twee opeenvolgende stuithoogtes constant is, dus $h_1 : h_0$ is gelijk aan $h_2 : h_1$, enzovoorts. Deze verhouding noemen we a. Voor de stuithoogte na n keer stuiteren geldt dan:

$$h_n = h_0 \cdot a^n$$

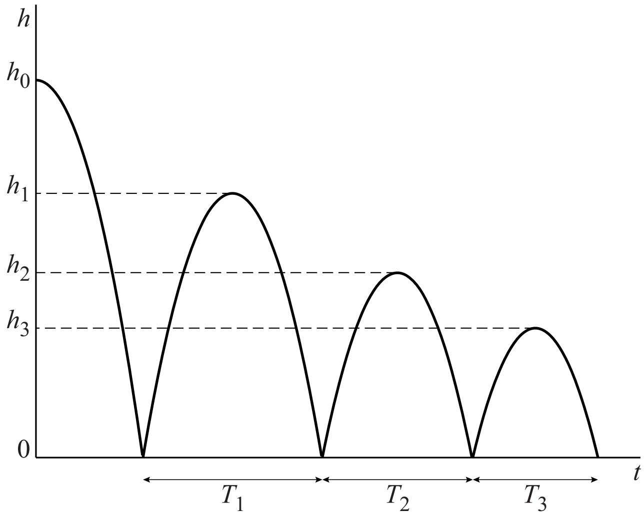
De waarde van a hangt af van het soort bal.

3p **3** Bereken de waarde van a voor een bal waarvan na 7 keer stuiteren de stuithoogte 5 keer zo klein is als de hoogte waarop de bal is losgelaten. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De hoogte van de onderkant van de bal tussen twee opeenvolgende keren stuiteren is een functie van de tijd. De grafiek van deze functie is een bergparabool.

De tijd in seconden tussen de n-de en de $(n+1)$-ste keer stuiteren noemen we de **stuittijd** T_n. In figuur 2 zijn drie stuittijden aangegeven.

figuur 2



De stuittijd T_n kan worden uitgedrukt in de stuithoogte h_n.

Er geldt:

$$T_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{h_n}{4,9}}$$

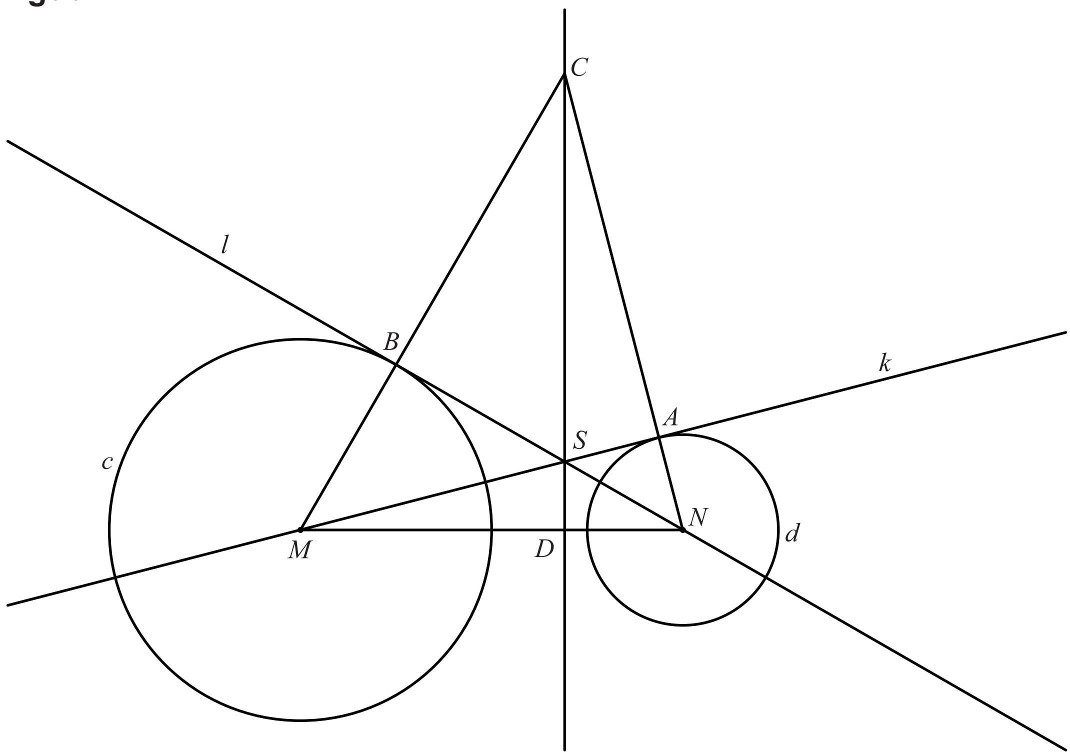
Een bal wordt losgelaten vanaf hoogte h_0. De stuittijd T_1 is 1,11 seconden en de stuittijd T_4 is 0,68 seconden.

5p **4** Bereken h_0. Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.

Snijdende raaklijnen

Gegeven zijn cirkel c met middelpunt M en cirkel d met middelpunt N. Lijn k gaat door M en raakt d in punt A. Lijn l gaat door N en raakt c in punt B. De punten A en B liggen aan dezelfde kant van MN. Punt S is het snijpunt van k en l. De lijnen MB en NA snijden elkaar in punt C. De lijn door C en S snijdt lijnstuk MN in punt D.
Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



Er geldt: $\angle ACS = \angle NMS$.

6p **5** Bewijs dit.

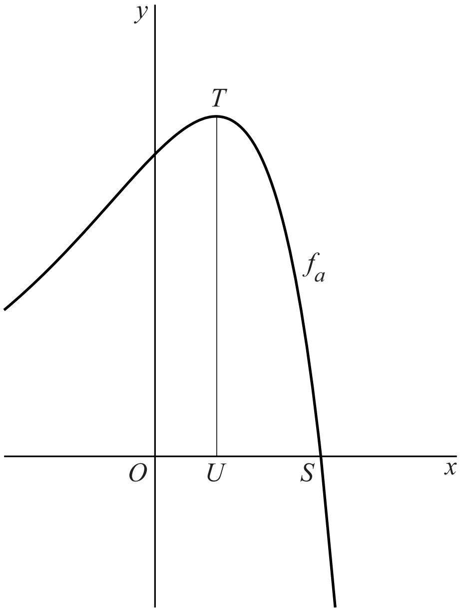
Onveranderlijke lengte

Voor $a > 1$ is de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = a \cdot e^x - e^{2x}$$

De grafiek van f_a snijdt de x-as in het punt $S(\ln a, 0)$. De grafiek van f_a heeft één top: punt T. De loodrechte projectie van T op de x-as is punt U. U ligt links van S op de x-as. Zie de figuur.

figuur



De x-coördinaten van de punten U en S zijn afhankelijk van de waarde van a.

7p **6** Bewijs dat de lengte van lijnstuk US onafhankelijk is van a.

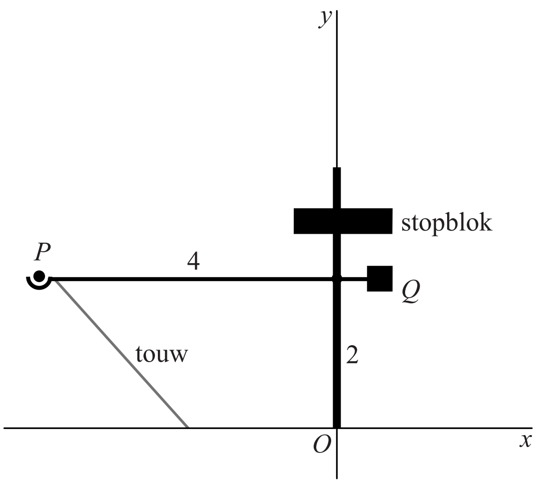
Over de muur

In vroeger tijden probeerde men met een katapult kogels over vestingmuren te slingeren. In deze opgave bekijken we een katapult met een draaibare hefboom. Het linker deel van de hefboom is 4 meter lang. Op het einde daarvan ligt een kogel met middelpunt P. Aan het einde van het rechter deel van de hefboom zit een contragewicht Q. In het begin wordt de hefboom horizontaal gehouden door een touw tussen de hefboom en de grond. De hoogte van de hefboom is dan 2 meter.

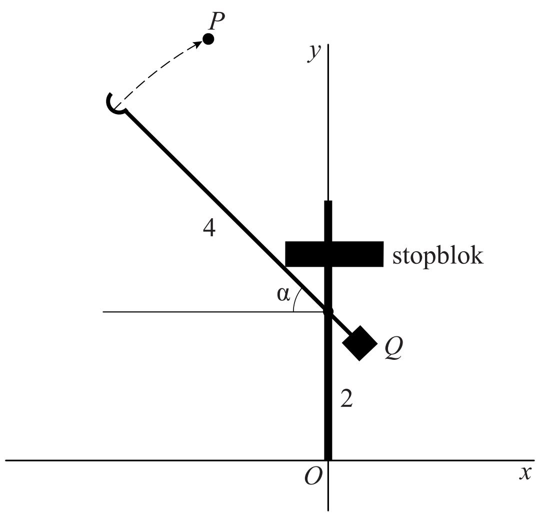
In figuur 1 is deze beginstand getekend in een assenstelsel met oorsprong O op de grond. Punt P heeft dan coördinaten $(-4, 2)$.

Nadat het touw wordt doorgesneden, gaat de hefboom draaien in de richting van de wijzers van de klok, tot deze draaiing door een verstelbaar stopblok wordt gestopt en de kogel wegvliegt. De draaihoek in de eindstand wordt de **stophoek** α genoemd, met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ radialen. In figuur 2 is de eindstand getekend.

figuur 1
beginstand



figuur 2
eindstand



2p **7** Druk de coördinaten van P uit in de stophoek α op het moment dat de eindstand wordt bereikt.

Als de hefboom bij stophoek α tot stilstand komt, verlaat de kogel de hefboom en vliegt vervolgens door de lucht. De baan die P dan beschrijft is bij benadering gegeven door de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 20t \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\sin\alpha} - 4\cos\alpha \\ y(t) = -5t^2 + 2 + 20t \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{\sin\alpha} + 4\sin\alpha \end{cases}$$

Hierin is t de tijd in seconden vanaf het moment dat de kogel de hefboom verlaat. Verder zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meters en is α in radialen.

Voor y_{top}, de y-coördinaat van het hoogste punt van de baan van P, geldt:

$$y_{\text{top}} = 2 + 24\sin\alpha - 20\sin^3\alpha$$

5p **8** Bewijs dat de formule voor y_{top} volgt uit de bewegingsvergelijkingen.

Uit de formule voor y_{top} kan de waarde van de stophoek α worden berekend waarvoor de kogel de grootst mogelijke hoogte bereikt. In dit optimale geval zijn de bewegingsvergelijkingen voor P bij benadering gelijk aan:

$$\begin{cases} x(t) = 10{,}1t - 3{,}1 \\ y(t) = -5t^2 + 12{,}3t + 4{,}5 \end{cases}$$

4p **9** Toon met een berekening aan dat in dit geval inderdaad bij benadering geldt $y(t) = -5t^2 + 12{,}3t + 4{,}5$.

De stophoek is zo ingesteld dat de kogel zo hoog mogelijk komt. Als de katapult, gemeten vanaf O, 24 meter van een 6 meter hoge vestingmuur staat, komt de kogel niet over de muur.

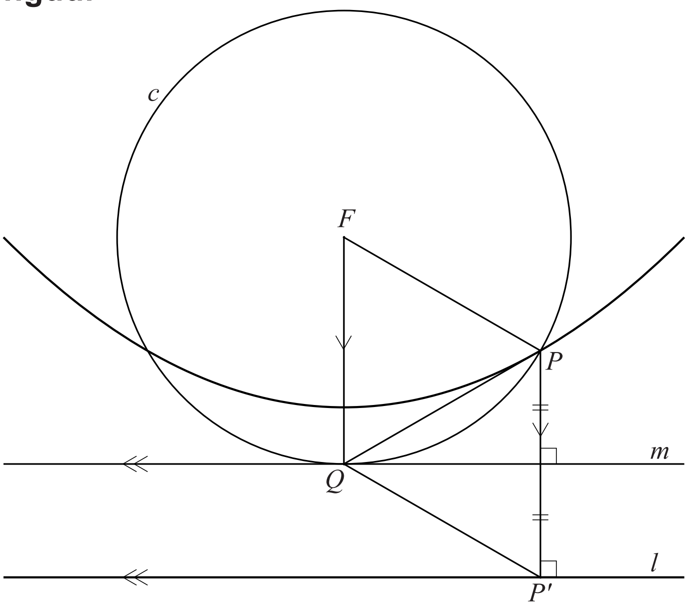
5p **10** Bereken de afstand waarover de katapult minstens in de richting van de muur moet worden verschoven zodat de kogel wel over de muur komt. Geef het antwoord in gehele meters.

Parabool en cirkel

Een parabool heeft brandpunt F en richtlijn l. Op de parabool ligt een punt P. Punt P' is de loodrechte projectie van P op l. Cirkel c heeft middelpunt F en gaat door P. De lijn door F evenwijdig aan PP' snijdt c in punt Q. Lijn m gaat door Q en is evenwijdig met l.

Punt P ligt zo op de parabool dat m de middelloodlijn van lijnstuk PP' is. Zie de figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

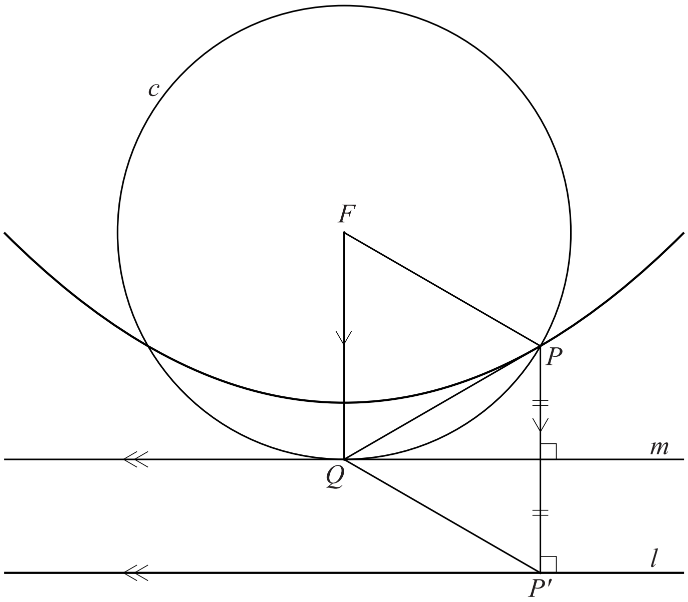
figuur



6p **11** Bewijs dat $PQ = FP$.

uitwerkbijlage

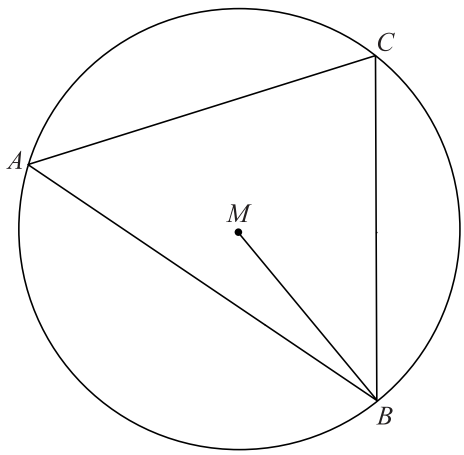
11



Koordenvierhoek maken

Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC. M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.
Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1

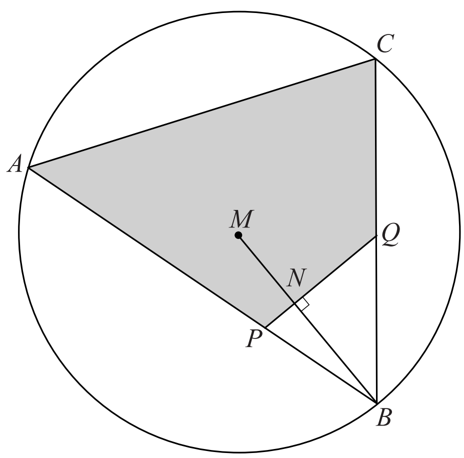


Er geldt: $\angle CBM = 90° - \angle CAB$.

4p **12** Bewijs dit.

In de driehoek van figuur 1 maken we nu als volgt een vierhoek.
Kies een punt N op lijnstuk MB. De loodlijn in N op MB snijdt de lijnstukken AB en BC in respectievelijk punt P en punt Q.
Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

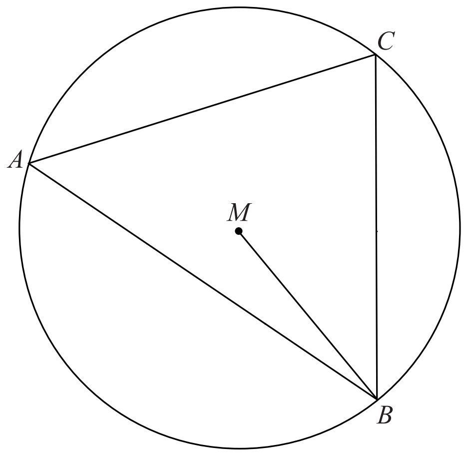
figuur 2



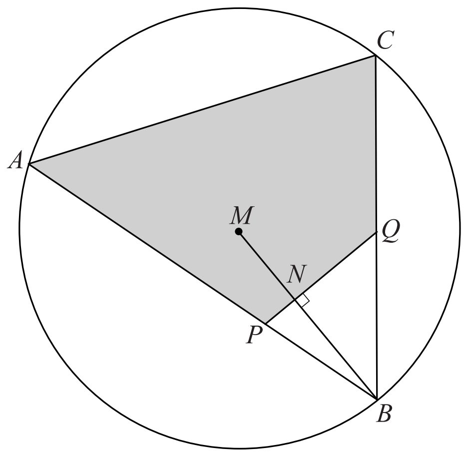
4p **13** Bewijs dat $APQC$ een koordenvierhoek is.

uitwerkbijlage

12



13



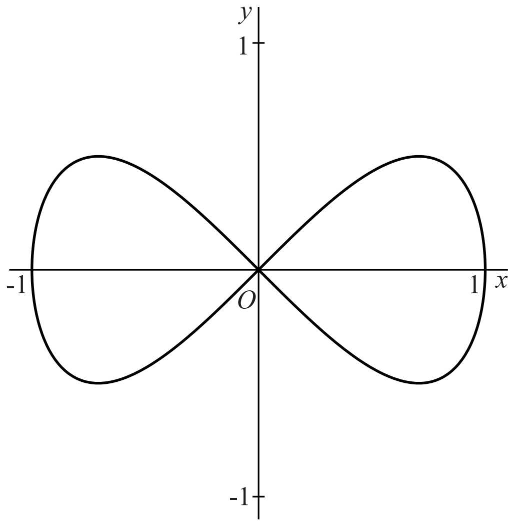
Lemniscaat

Punt P beweegt volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \cdot \cos t \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t < 2\pi$$

In figuur 1 is de baan van P getekend. Deze baan wordt **lemniscaat** genoemd.

figuur 1



Tijdens de beweging passeert punt P vier keer de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{4}$.

4p **14** Bereken exact voor welke waarden van t dit het geval is.

De snelheid van P op tijdstip t is gelijk aan $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.
P gaat twee keer door de oorsprong O, beide keren met even grote snelheid.

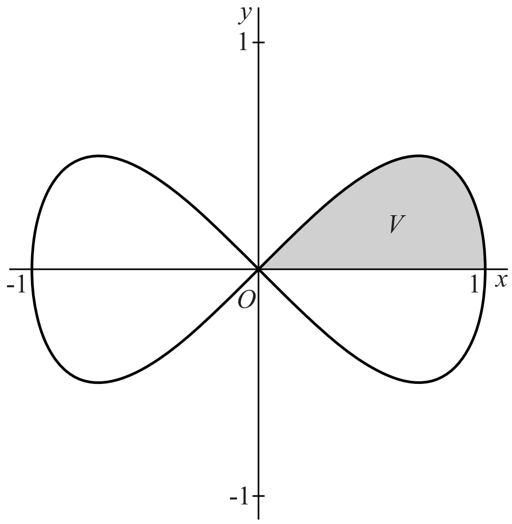
6p **15** Bereken exact deze snelheid.

Een vergelijking van de baan van P is: $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

3p **16** Bewijs dit.

De lemniscaat snijdt de positieve x-as bij $x = 1$.
V is het vlakdeel boven de x-as dat wordt ingesloten door de lemniscaat en de positieve x-as. Zie figuur 2.

figuur 2



4p **17** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.