Vraag	Antwoord	Scores

Het achtste deel

1 maximumscore 4

- $A(p)=\int_{-9}^{p}\sqrt{x+9}\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\sqrt{x+9}$ is $\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}$ 2
- $A(p)=\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(-9+9)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ 1

of

- $A(p)=\int_{-9}^{p}\sqrt{x+9}\,\mathrm{d}x$ 1
- De afgeleide van $\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ is gelijk aan $\sqrt{p+9}$ 2
- $A(p)=\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(-9+9)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$ 1

2 maximumscore 5

- De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van *f*, de *x*-as en de *y*-as is $(A(0)=\frac{2}{3}(0+9)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\cdot 27=)\ 18$ 1
- Voor *p* moet gelden: $A(p)=\frac{18}{8}$ 1
- $\frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}=\frac{18}{8}$ 1
- $p+9=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ 1
- Het antwoord: $p=-\frac{27}{4}$ (of $p=-6\frac{3}{4}$) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Stuiterende bal

3 **maximumscore 3**

- (Uit $h_7 = h_0 \cdot a^7 = \frac{1}{5} h_0$ volgt) $a^7 = \frac{1}{5}$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- $a = 0,79$ — 1

4 **maximumscore 5**

- $2 \cdot \sqrt{\dfrac{h_1}{4,9}} = 1,11$ geeft $h_1 \approx 1,509$ (of nauwkeuriger) — 1
- $2 \cdot \sqrt{\dfrac{h_4}{4,9}} = 0,68$ geeft $h_4 \approx 0,566$ (of nauwkeuriger) — 1
- (h_n neemt exponentieel af met factor a dus) $a^3 \approx \dfrac{0,566}{1,509}$ — 1
- $a \approx 0,721$ (of nauwkeuriger) — 1
- $h_0 = \dfrac{h_1}{a} \approx \dfrac{1,509}{0,721} \approx 2,1$ (meter) (of 21 decimeter) — 1

Opmerking
Als wordt gerekend met 2 decimalen in plaats van 3 decimalen achter de komma, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores

Snijdende raaklijnen

5 **maximumscore 6**

- $\angle CAS = \angle CBS = 90°$; *raaklijn* 1
- MA en NB zijn hoogtelijnen in driehoek MNC, dus S is het hoogtepunt in deze driehoek; *hoogtelijnen driehoek* 1
- $\angle CDM = 90°$; *hoogtelijn driehoek* 1
- Driehoeken MAN en CDN zijn gelijkvormig; *hh* 2
- $\angle ACS = \angle ACD = \angle AMD = \angle NMS$ 1

of

- $\angle CAS = \angle CBS = 90°$; *raaklijn* 1
- $\angle ASC = 90° - \angle ACS$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle MSD = \angle ASC = 90° - \angle ACS$; *overstaande hoeken* 1
- MA en NB zijn hoogtelijnen in driehoek MNC, dus S is het hoogtepunt in deze driehoek; *hoogtelijnen driehoek* 1
- $\angle CDM = 90°$; *hoogtelijn driehoek* 1
- $\angle NMS\ (= 90° - \angle MSD) = \angle ACS$; *hoekensom driehoek* 1

of

- $\angle MBN = 90° = \angle MAN$; *raaklijn* 1
- Vierhoek $MNAB$ is een koordenvierhoek; *Thales* 1
- $\angle AMN = \angle ABN$; *constante hoek* 1
- $\angle CBS = 90° = \angle CAS$ dus vierhoek $BSAC$ is een koordenvierhoek 1
- $\angle ABN = \angle ACS$; *constante hoek* 1
- $\angle ACS = \angle ABN = \angle AMN = \angle NMS$ 1

of

- $\angle CAS = \angle CBS = 90°$; *raaklijn* 1
- MA en NB zijn hoogtelijnen in driehoek MNC, dus S is het hoogtepunt in deze driehoek; *hoogtelijnen driehoek* 1
- $\angle CDM = 90°$; *hoogtelijn driehoek* 1
- $\angle CAM = \angle CDM$, dus M, D, A en C liggen op een cirkel; *constante hoek* 2
- $\angle ACS = \angle ACD = \angle AMD = \angle NMS$; *constante hoek* 1

Vraag	Antwoord	Scores

Onveranderlijke lengte

6 maximumscore 7

- $f_a'(x) = a \cdot e^x - 2e^{2x}$ 1
- Voor de x-coördinaat van de top geldt: $a \cdot e^x - 2e^{2x} = 0$ 1
- Hieruit volgt $e^x = \frac{1}{2}a$ 2
- Dus $x_U = x_T = \ln(\frac{1}{2}a)$ 1
- Hieruit volgt $US = \ln a - \ln\left(\frac{1}{2}a\right)$ 1
- Dus $US = \ln a - (\ln a - \ln 2) = \ln 2$ (of $US = \ln\left(\frac{a}{\frac{1}{2}a}\right) = \ln 2$) (dus US is onafhankelijk van a) 1

Over de muur

7 maximumscore 2

- $x_P = -4\cos\alpha$ 1
- $y_P = 2 + 4\sin\alpha$ 1

8 maximumscore 5

- $\frac{dy}{dt} = -10t + 20\cos\alpha \cdot \sqrt{\sin\alpha}$ 1
- In het hoogste punt geldt: $t = 2\cos\alpha \cdot \sqrt{\sin\alpha}$ 1
- $y_{\text{top}} = -5(2\cos\alpha \cdot \sqrt{\sin\alpha})^2 + 2 + 4\sin\alpha + 20 \cdot 2(\cos\alpha \cdot \sqrt{\sin\alpha})^2$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + 4\sin\alpha$ 1
- $y_{\text{top}} = 2 + 20\sin\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) + 4\sin\alpha = 2 + 24\sin\alpha - 20\sin^3\alpha$ 1

9 maximumscore 4

- Beschrijven hoe de waarde van α kan worden gevonden waarvoor y_{top} maximaal is 1
- $\alpha \approx 0{,}685$ (of nauwkeuriger) 1
- $\sin\alpha \approx 0{,}632$ (of nauwkeuriger) en $\cos\alpha \approx 0{,}774$ (of nauwkeuriger) (of $\cos\alpha \approx 0{,}775$ of nauwkeuriger) 1
- Dus bij benadering geldt: $y(t) = -5t^2 + 2 + 4 \cdot 0{,}632 + 20t \cdot 0{,}774 \cdot \sqrt{0{,}633} = -5t^2 + 12{,}3t + 4{,}5$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

10 **maximumscore 5**

- De vergelijking $-5t^2+12,3t+4,5=6$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $t\approx 2,33$ (of nauwkeuriger) ($t\approx 0,13$ voldoet niet) 1
- $x(2,33)\approx 20,4$ (of nauwkeuriger) 1
- Het antwoord: 4 (meter) 1

Parabool en cirkel

11 **maximumscore 6**

- $PF=PP'$; *parabool* 1
- Ook geldt: $FP=FQ$ (; *cirkel*), dus $FQ=PP'$ 1
- $\angle FQP=\angle QPP'$; *Z-hoeken* 1
- De driehoeken PQF en QPP' zijn congruent; *ZHZ*, dus $P'Q=FP$ 1
- $PQ=P'Q$; *middelloodlijn* 1
- Dus $PQ=FP$ 1

of

- $PF=PP'$; *parabool* 1
- Ook geldt: $FQ=FQ$ (; *cirkel*), dus $FQ=PP'$ 1
- $FQ \mathbin{/\mkern-3mu/} PP'$ en $FQ=PP'$, dus $P'PFQ$ is een parallellogram; (*parallellogram*) 1
- Hieruit volgt $P'Q=FP$ 1
- $PQ=P'Q$; *middelloodlijn* 1
- Dus $PQ=FP$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Koordenvierhoek maken

12 maximumscore 4

- $\angle CMB = 2 \cdot \angle CAB$; *omtrekshoek* 1
- $\angle CBM = \angle BCM$; *(cirkel,) gelijkbenige driehoek* 1
- Dus $\angle CBM = \frac{1}{2}(180° - \angle CMB)$; *hoekensom driehoek* 1
- Dus $\angle CBM = \frac{1}{2}(180° - 2 \cdot \angle CAB) = 90° - \angle CAB$ 1

of

- $\angle CBM = \angle BCM$, $\angle ACM = \angle CAM$ en $\angle BAM = \angle ABM$; (*cirkel,*) *gelijkbenige driehoek* 1
- $\angle ABM + \angle CBM + \angle BCM + \angle ACM + \angle CAM + \angle BAM = 180°$; *hoekensom driehoek* 1
- Hieruit volgt $\angle CBM + \angle CAM + \angle BAM = 90°$ 1
- Dus $\angle CBM = 90° - (\angle CAM + \angle BAM) = 90° - \angle CAB$ 1

of

- Het snijpunt van lijn *BM* en de kleine boog *AC* noemen we *D*. $\angle BCD = 90°$; *Thales* 1
- $\angle CBM (= \angle CBD) = 90° - \angle CDB$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle CAB = \angle CDB$; *constante hoek* 1
- Dus $\angle CBM = 90° - \angle CAB$ 1

of

- Kies punt E op de raaklijn aan de cirkel in *B*, rechts van *B*. $\angle EBM = 90°$; *raaklijn* 1
- $\angle CBM = 90° - \angle CBE$ 1
- $\angle CAB = \angle CBE$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- Dus $\angle CBM = 90° - \angle CAB$ 1

13 maximumscore 4

- $\angle CQP = 90° + \angle CBM$; *buitenhoek driehoek* 2
- $\angle CQP = (90° + (90° - \angle CAB)) = 180° - \angle CAB$ 1
- Hieruit volgt $\angle CQP + \angle CAP = 180°$, dus *APQC* is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1

of

- $\angle BQP = 90° - \angle CBM$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle BQP = (90° - (90° - \angle CAB)) = \angle CAB$ 1
- $\angle CQP = 180° - \angle BQP$; *gestrekte hoek* 1
- Hieruit volgt $\angle CQP + \angle CAP = 180°$, dus *APQC* is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Lemniscaat

14 maximumscore 4

- Er moet gelden $\sin t \cdot \cos t = \frac{1}{4}$ — 1
- ($2\sin t \cdot \cos t = \frac{1}{2}$ geeft) $\sin(2t) = \frac{1}{2}$ — 1
- Op het interval $[0,\ 2\pi\rangle$ zijn de oplossingen $t = \frac{1}{12}\pi$, $t = \frac{5}{12}\pi$, $t = \frac{13}{12}\pi$ en $t = \frac{17}{12}\pi$ — 2

15 maximumscore 6

- In de oorsprong geldt: $\cos t = 0$ — 1
- $t = \frac{1}{2}\pi$ (of $t = \frac{3}{2}\pi$) — 1
- $x'(t) = -\sin t$ — 1
- $y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$ $(= \cos(2t))$ — 1
- $x'(\frac{1}{2}\pi) = -1$ en $y'(\frac{1}{2}\pi) = -1$ — 1
- De snelheid is $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ — 1

of

- In de oorsprong geldt: $\cos t = 0$ — 1
- $t = \frac{1}{2}\pi$ (of $t = \frac{3}{2}\pi$) — 1
- $x'(t) = -\sin t$ — 1
- $y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t$ $(= \cos(2t))$ — 1
- $v(t) = \sqrt{\sin^2(\frac{1}{2}\pi) + (\cos^2(\frac{1}{2}\pi) - \sin^2(\frac{1}{2}\pi))^2}$ — 1
- $v(\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{2}$ — 1

Opmerking
Als met $t = 0$ wordt gerekend, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores

16 **maximumscore 3**

- $(y(t))^2 = \sin^2 t \cdot \cos^2 t$ 1
- $(y(t))^2 = (1-\cos^2 t)\cdot \cos^2 t$ 1
- Substitutie van $x(t) = \cos t$ geeft $(y(t))^2 = (1-(x(t))^2)\cdot(x(t))^2$ (dus $y^2 = x^2 \cdot (1-x^2)$) 1

of

- $(y(t))^2 = (\sin t \cdot \cos t)^2 = \sin^2 t \cdot \cos^2 t$ 1
- $(x(t))^2 = \cos^2 t$ en $(y(t))^2 = \sin^2 t \cdot \cos^2 t$ invullen in $y^2 = x^2 \cdot (1-x^2)$ geeft $\sin^2 t \cdot \cos^2 t = \cos^2 t \cdot (1-\cos^2 t)$ 1
- Dit is juist omdat $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ 1

of

- $(x(t))^2 \cdot (1-(x(t))^2) = \cos^2 t \cdot (1-\cos^2 t)$ 1
- $\cos^2 t \cdot (1-\cos^2 t) = \cos^2 t \cdot \sin^2 t$ 1
- $\cos^2 t \cdot \sin^2 t = (\sin t \cdot \cos t)^2 = (y(t))^2$ (dus $y^2 = x^2 \cdot (1-x^2)$) 1

17 **maximumscore 4**

- De gevraagde inhoud is gelijk aan $\int_0^1 \pi y^2 \, dx$ 1
- De inhoud is gelijk aan $\pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$ 1
- Een primitieve van $x^2 - x^4$ is $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$ 1
- De inhoud is $\frac{2}{15}\pi$ 1