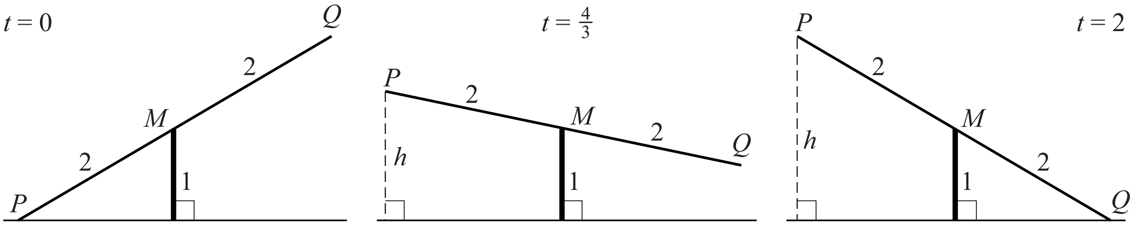
Het uiteinde van een wip

We bekijken in deze opgave een wiskundig model voor de beweging van het uiteinde van een wip.

Lijnstuk PQ met midden M en lengte 4 draait om M. De hoogte van M is 1. Zie figuur 1. We kijken naar het verloop van de hoogte h van P. Op tijdstip $t=0$ is de hoogte van P gelijk aan 0. Van $t=0$ tot $t=2$ beweegt P omhoog. In figuur 1 is het lijnstuk getekend op drie tijdstippen: op $t=0$, op $t=\frac{4}{3}$ en op $t=2$.

figuur 1



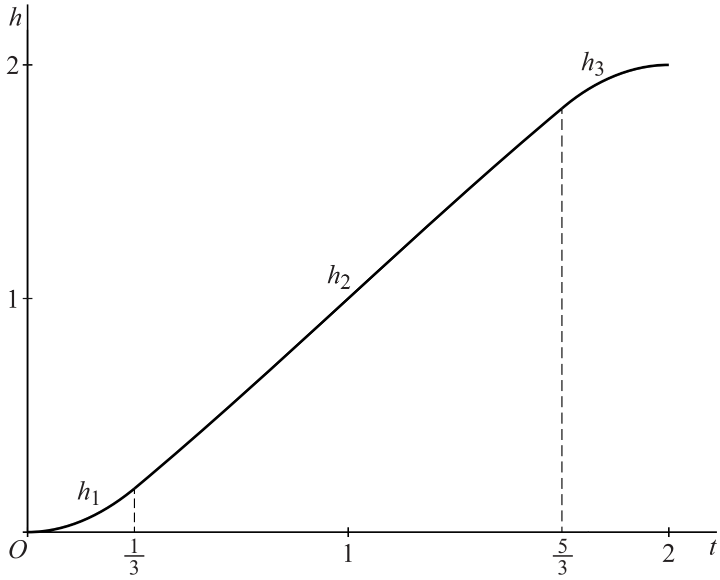
De hoogte van P tijdens de omhooggaande beweging wordt beschreven door het volgende model:

- fase 1: $h_1(t)=1+2\sin\left(\frac{3\pi}{10}t^2-\frac{\pi}{6}\right)$ voor $0\leq t\leq \frac{1}{3}$
- fase 2: $h_2(t)=1+2\sin\left(\frac{\pi}{5}t-\frac{\pi}{5}\right)$ voor $\frac{1}{3}<t\leq \frac{5}{3}$
- fase 3: $h_3(t)=1+2\sin\left(-\frac{3\pi}{10}t^2+\frac{6\pi}{5}t-\frac{31\pi}{30}\right)$ voor $\frac{5}{3}<t\leq 2$

Hierin zijn h_1, h_2 en h_3 de hoogtes van P in de verschillende fasen.

In figuur 2 is de grafiek van de hoogte van P in de fasen 1, 2 en 3 getekend.

figuur 2



De hoogte van P aan het eind van fase 2 is $h_2(\frac{5}{3})$. Door $t = \frac{5}{3}$ in te vullen in de formule van h_3 kan worden bewezen dat de hoogte van P aan het begin van fase 3 gelijk is aan de hoogte van P aan het eind van fase 2.

3p **3** Bewijs dat deze hoogtes gelijk zijn.

De helling van de grafiek van h_2 aan het begin van fase 2 is $\frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$.

4p **4** Bewijs dat de helling van de grafiek van h_1 aan het eind van fase 1 hieraan gelijk is.

Voor elke waarde van a, met $0 < a < \frac{2}{3}$, geldt:

$$\frac{h_2(1-a)+h_2(1+a)}{2}=1$$

4p **5** Bewijs deze gelijkheid.