

Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Eerste- en derdegraadsfunctie

1 maximumscore 4

- Aangetoond moet worden dat $f'(0) = g'(0)$ 1
- $f'(x) = 2x \cdot (x - 1\frac{1}{2}) + (x^2 - 1) \cdot 1$ 1
- $f'(0) = -1$ 1
- $g'(x) = -1$, dus $g'(0) = -1$ (dus de grafieken van f en g raken elkaar in A) 1

2 maximumscore 6

- De grafiek van f snijdt de x -as tussen O en B in $(1, 0)$ 1
- De oppervlakte van het linkerdeel is $\int_0^1 (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2}) dx$ 1
- $(x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2}) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$ 1
- Een primitieve van $x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x$ 1
- De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}$ 1
- De oppervlakte van het rechterdeel is $\frac{1}{2} \cdot (1\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (en dat is de helft van de oppervlakte van het linkerdeel) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Verzadigingsgraad van hemoglobine

3 maximumscore 3

- De vergelijking $75 = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 42 (mmHg) 1

of

- De vergelijking $75 = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$ moet worden opgelost 1
- $75 = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$ geeft $100p^3 = 75p^3 + 1875000$ 1
- $25p^3 = 1875000$ geeft $p^3 = 75000$, dus $p = \sqrt[3]{75000} \approx 42$ (mmHg) 1

4 maximumscore 4

- $\frac{dv}{dp} = \frac{300p^2(p^3 + 25000) - 100p^3 \cdot 3p^2}{(p^3 + 25000)^2}$ (dus $\frac{dv}{dp} = \frac{7500000p^2}{(p^3 + 25000)^2}$) 2
- Beschrijven hoe de waarde van p waarvoor $\frac{dv}{dp}$ maximaal is, kan worden bepaald 1
- Het antwoord: 23 1

of

- $\frac{dv}{dp} = \frac{300p^2(p^3 + 25000) - 100p^3 \cdot 3p^2}{(p^3 + 25000)^2}$ (dus $\frac{dv}{dp} = \frac{7500000p^2}{(p^3 + 25000)^2}$) 2
- $\frac{d^2v}{dp^2} = \frac{15000000p \cdot (p^3 + 25000)^2 - 7500000p^2 \cdot 6p^2(p^3 + 25000)}{(p^3 + 25000)^4}$ 1
- Algebraïsch of met GR $\frac{d^2v}{dp^2} = 0$ oplossen geeft het antwoord 23 (want uit de grafiek blijkt dat de afgeleide voor deze waarde van p maximaal is) 1

5 maximumscore 4

- Uit $\frac{v}{100-v} = 0,00004p^3$ volgt $v = 0,00004p^3(100-v)$ 1
- Dit geeft $25000v = 100p^3 - vp^3$ 1
- Hieruit volgt $25000v + vp^3 = 100p^3$ 1
- Daaruit volgt $v(25000 + p^3) = 100p^3$, dus $v = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Vermenigvuldigen in horizontale en verticale richting

6 maximumscore 4

- Vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met e geeft de grafiek met vergelijking $y = e \cdot \frac{1 + \ln x}{x}$ 1

- Deze vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{e}$ geeft de grafiek met vergelijking $y = e \cdot \frac{1 + \ln(ex)}{ex}$ 1

- $e \cdot \frac{1 + \ln(ex)}{ex} = \frac{1 + \ln e + \ln x}{x}$ 1

- $c = 1 + \ln e = 2$ 1

of

- Op de grafiek van f ligt het punt $(1, 1)$ 1

- Het beeld van dit punt na de twee vermenigvuldigingen is $(\frac{1}{e}, e)$ 1

- Dit punt ligt op de grafiek van g_c als $e = \frac{c + \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)}$ 1

- $c + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 1$ geeft $c = 2$ 1

7 maximumscore 4

- De oppervlakte is $\int_1^e (g_3(x) - f(x)) dx$ 1

- $g_3(x) - f(x) = \frac{3 + \ln x}{x} - \frac{1 + \ln x}{x} = \frac{2}{x}$ 1

- Een primitieve van $\frac{2}{x}$ is $2 \ln x$ 1

- De oppervlakte is $2 \ln e - 2 \ln 1 = 2$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Gelijke hoeken

8 maximumscore 3

- $\angle ADB = \angle ACD$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 2
- Verder $\angle A = \angle A$, dus $\triangle ABD \sim \triangle ADC$; *hh* 1

of

- Kies E op het verlengde van AD , dan $\angle DBC = \angle EDC$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- $\angle ABD = 180^\circ - \angle CBD$ en $\angle ADC = 180^\circ - \angle EDC$; *gestrekte hoek*, dus $\angle ABD = \angle ADC$ 1
- Verder $\angle A = \angle A$, dus $\triangle ABD \sim \triangle ADC$; *hh* 1

9 maximumscore 4

- $\angle PQD = 180^\circ - \angle ADC - \frac{1}{2}\angle A$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle APB = 180^\circ - \angle ABD - \frac{1}{2}\angle A$; *hoekensom driehoek* 1
- Verder $\angle ADC = \angle ABD$, dus $\angle PQD = \angle APB$ 1
- $\angle QPD = \angle APB$; *overstaande hoeken*, dus $\angle PQD = \angle QPD$ 1

of

- $\angle QPD = \frac{1}{2}\angle A + \angle ADB$; *buitenhoek driehoek* 1
- $\angle PQD = \frac{1}{2}\angle A + \angle ACD$; *buitenhoek driehoek* 1
- $\angle ACD = \angle ADB$, dus $\angle PQD = \angle QPD$ 2

of

- Uit $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ volgt $\angle ABP = \angle ADQ$ 1
- Verder $\angle BAP = \angle DAQ$, dus $\triangle ABP \sim \triangle ADQ$; *hh* 1
- Hieruit volgt $\angle APB = \angle AQD (= \angle PQD)$ 1
- $\angle APB = \angle QPD$; *overstaande hoeken*, dus $\angle PQD = \angle QPD$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een hartvormige kromme

10 maximumscore 8

- $y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$ 2
- In het punt met maximale y-coördinaat geldt $y'(t) = 0$ (en $x'(t) \neq 0$) 1
- Dit geeft $\cos t = \cos(2t)$ 1
- Dus $t = 2t + k \cdot 2\pi$ of $t = -2t + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Dus $t = k \cdot 2\pi$ of $t = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ (met k geheel) 1
- Het punt met maximale y-coördinaat wordt bereikt voor $t = \frac{2}{3}\pi$ 1
- De y-coördinaat van dit punt is
 $2\sin(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{4}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

of

- $y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$ 2
- In het punt met maximale y-coördinaat geldt $y'(t) = 0$ (en $x'(t) \neq 0$) 1
- $\cos t - \cos(2t) = -2\sin(1\frac{1}{2}t)\sin(-\frac{1}{2}t)$ 1
- Dus $\sin(1\frac{1}{2}t) = 0$ of $\sin(-\frac{1}{2}t) = 0$, dus $1\frac{1}{2}t = k \cdot \pi$ of $-\frac{1}{2}t = k \cdot \pi$ 1
- Dus $t = k \cdot 2\pi$ of $t = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ (met k geheel) 1
- Het punt met maximale y-coördinaat wordt bereikt voor $t = \frac{2}{3}\pi$ 1
- De y-coördinaat van dit punt is
 $2\sin(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{4}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

of

- $y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$ 2
- In het punt met maximale y-coördinaat geldt $y'(t) = 0$ (en $x'(t) \neq 0$) 1
- $2\cos t - 2\cos(2t) = 2\cos t - 2(2\cos^2 t - 1) = 0$ geeft $\cos^2 t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2} = 0$ 1
- $(\cos t - 1)(\cos t + \frac{1}{2}) = 0$ geeft $\cos t = 1$ of $\cos t = -\frac{1}{2}$ 1
- Dus $t = k \cdot 2\pi$ of $t = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $t = -\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Het punt met maximale y-coördinaat wordt bereikt voor $t = \frac{2}{3}\pi$ 1
- De y-coördinaat van dit punt is
 $2\sin(\frac{2}{3}\pi) - \sin(\frac{4}{3}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

Opmerking

Als de vergelijking $2\cos t - 2\cos(2t) = 0$ niet algebraïsch maar met de GR is opgelost, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
11	maximumscore 6	
	• De vergelijking $2\cos t - \cos(2t) = 1$ moet worden opgelost	1
	• Dit geeft $2\cos t - (2\cos^2 t - 1) = 1$	1
	• Hieruit volgt $\cos t - \cos^2 t = 0$	1
	• Dus $\cos t = 0$ of $\cos t = 1$	1
	• Dit geeft $t = 0$ of $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$	1
	• $y(\frac{1}{2}\pi) = 2$ (of $y(1\frac{1}{2}\pi) = -2$), dus $a = 2$	1

Opmerking

Als de vergelijking $2\cos t - \cos(2t) = 1$ niet algebraïsch maar met de GR is opgelost, voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

De leeftijd van ons zonnestelsel

12 maximumscore 3

- Voor de halveringstijd t geldt $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ 1
- Hieruit volgt $-\lambda t = \ln \frac{1}{2}$ 1
- $t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-\lambda} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1,42 \cdot 10^{-11}}$, dus de gevraagde tijd is (ongeveer) 49 miljard
(of $4,9 \cdot 10^{10}$) (jaar) 1

13 maximumscore 3

- Uit $a(t) + b(t) = a(0) + b(0)$ volgt $a(t) + b(t) - a(0) = b(0)$ 1
- Uit $a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}$ volgt $a(0) = a(t) \cdot e^{\lambda t}$ 1
- Dus $a(t) + b(t) - a(t) \cdot e^{\lambda t} = b(0)$, ofwel $b(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t) = b(0)$ 1

of

- $b(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t) = a(0) + b(0) - a(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t)$ 1
- $a(0) + b(0) - a(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t) = a(0) + b(0) - a(t) \cdot e^{\lambda t}$ 1
- $a(0) + b(0) - a(t) \cdot e^{\lambda t} = a(0) + b(0) - a(0) \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = b(0)$
(dus $b(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t) = b(0)$) 1

14 maximumscore 4

- Invullen van de tabelgegevens geeft $0,739 + (1 - e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t})0,60 = b(0)$
en $0,713 + (1 - e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t})0,20 = b(0)$ 1
- (Omdat $b(0)$ voor elke meteoriet hetzelfde is, geldt)
 $0,739 - (e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} - 1)0,60 = 0,713 - (e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} - 1)0,20$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 4 miljard (of $4 \cdot 10^9$) (jaar) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Koordenvierhoek

15 maximumscore 5

- $\angle ADB = \angle BCA$; *constante hoek* 1
- $\angle DAE = \angle ADE = \angle ADB$ en $\angle CBF = \angle BCF = \angle BCA$; *gelijkbenige driehoek* 1
- $\angle AEB = 2 \cdot \angle ADB$ en $\angle AFB = 2 \cdot \angle BCA$; *buitenhoek driehoek* 1
- Dus $\angle AEB = \angle AFB$ 1
- Dus A, B, F en E liggen op een cirkel; *constante hoek* 1

16 maximumscore 4

- $\angle ABE = \angle AFE$; *constante hoek* 1
- $\angle ABD = \angle ACD$; *constante hoek* 1
- Dus $\angle AFE = \angle ACD$ 1
- Dus $EF \parallel DC$; *F-hoeken* 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Lijnstuk en parabool

17 maximumscore 4

- Het midden van lijnstuk PR is $(\frac{1}{2}a, 4)$ 1
- Er moet gelden: $f(\frac{1}{2}a) = 4$ 1
- Dus $8 - \frac{1}{8}a^2 = 4$ 1
- Hieruit volgt $a^2 = 32$, dus (wegens $a > 0$) $a = 4\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Voor het snijpunt van lijnstuk PR en de grafiek van f geldt $8 - \frac{8}{a} \cdot x = 8 - \frac{1}{2}x^2$ 1
- Dit geeft $x = 0$ of $x = \frac{16}{a}$ 1
- Het snijpunt met x -coördinaat $\frac{16}{a}$ is het midden van PR als $\frac{16}{a} = \frac{1}{2}a$ 1
- Hieruit volgt $a^2 = 32$, dus (wegens $a > 0$) $a = 4\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- $y = 4$ geeft $8 - \frac{1}{2}x^2 = 4$ 1
- Dit geeft (wegens $x > 0$) $x = \sqrt{8}$ 1
- $\frac{1}{2}a = \sqrt{8}$ 1
- Hieruit volgt $a = 4\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

18 maximumscore 5

- Beschrijven hoe $\int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ kan worden berekend 1
- De lengte van boog PQ is (ongeveer) 9,294 1
- De lengte van lijnstuk PR is $\sqrt{64 + a^2}$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\sqrt{64 + a^2} = 9,294$ kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 4,73 1