7 Verschoven platen

13. Driehoeken $\triangle POA$ en $\triangle PQ'Q$ hebben beide een rechte hoek, en ze hebben hoek P gemeenschappelijk. Hieruit kun je concluderen dat deze driehoeken gelijkvormig zijn, en dit betekent dat $\frac{|PQ'|}{|PQ|} = \frac{|PO|}{|PA|}$. Je weet dat $|PQ'| = p+q$, $|PO| = p$ en $PQ = 280$. Verder kun je met de stelling van Pythagoras uitrekenen dat $|PA| = \sqrt{35^2+p^2}$. Als je deze gegevens invult in de formule voor de verhoudingen van de zijden krijg je

$$\begin{aligned}\frac{p+q}{280} &= \frac{p}{\sqrt{35^2+p^2}},\\ p+q &= \frac{280p}{\sqrt{1225+p^2}},\\ q &= \frac{280p}{\sqrt{1225+p^2}} - p.\end{aligned}$$

14. Bij het uitrekenen van de afgeleide van q moet je letten op zowel de quotiëntregel als de productregel. Je krijgt

$$q'(p) = \frac{\sqrt{p^2+1225}\cdot 280 - 280p\cdot\frac{1}{2\sqrt{p^2+1225}}\cdot 2p}{p^2+1225} - 1.$$

Door boven en onder de streep te vermenigvuldigen met $\sqrt{p^2+1225}$ kan de gevraagde formule worden verkregen:

$$\begin{aligned}q'(p) &= \frac{280(p^2+1225) - 280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}} - 1,\\ &= \frac{280p^2+343000-280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}} - 1,\\ &= \frac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}} - 1.\end{aligned}$$

15. Bij het maximum van q geldt dat $q'(p) = 0$. Het oplossen van deze vergelijking geeft

$$\begin{aligned}\frac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}} - 1 &= 0,\\ \frac{343000}{(p^2+1225)^{3/2}} &= 1,\\ 343000 &= (p^2+1225)^{3/2},\\ p^2+1225 &= \sqrt[2/3]{343000} = 4900,\\ p^2 &= 4900-1225 = 3675,\\ p &= \sqrt{3675} = 35\sqrt{3}.\end{aligned}$$

De negatieve oplossing hebben we hier genegeerd, aangezien deze niet overeenkomt met een balk in het kunstwerk. Het maximum is nu gelijk aan $q(35\sqrt{3})$, oftewel

$$\begin{aligned} q(35\sqrt{3}) &= \frac{280 \cdot 35\sqrt{3}}{\sqrt{3675 + 1255}} - 35\sqrt{3}, \\ &= \frac{9800\sqrt{3}}{\sqrt{4900}} - 35\sqrt{3}, \\ &= \frac{9800\sqrt{3}}{70} - 35\sqrt{3}, \\ &= 140\sqrt{3} - 35\sqrt{3}, \\ &= 105\sqrt{3}. \end{aligned}$$