1 Onafhankelijk van a

1. Als F_a een primitieve is van f_a, dan is f_a de afgeleide van F_a. Deze afgeleide ga je nu berekenen. Let hierbij op de productregel en de kettingregel.

$$\begin{aligned} F_a' &= 1 \cdot e^{-ax} + x \cdot e^{-ax} \cdot -a, \\ &= e^{-ax} - ax \cdot e^{-ax}, \\ &= (1 - ax) \cdot e^{-ax}, \\ &= f_a. \end{aligned}$$

   F_a is dus inderdaad een primitieve van f_a.

2. De oppervlakte van driehoek OAB kun je berekenen met de formule voor de oppervlakte van een driehoek. Je vindt dan dat de oppervlakte gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{2a}$. Nu moet je nog de oppervlakte van het onderste deel van de driehoek uitrekenen. Deze is gelijk aan

$$\begin{aligned} \text{opp} &= \int_0^{\frac{1}{a}} f_a(x)\,\mathrm{d}x, \\ &= \left[F_a(x)\right]_0^{\frac{1}{a}}, \\ &= \left[x \cdot e^{-ax}\right]_0^{\frac{1}{a}}, \\ &= \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{a}{a}} - 0 \cdot e^0, \\ &= \frac{1}{a} \cdot e^{-1}, \\ &= \frac{1}{ae}. \end{aligned}$$

   We hebben hier gebruik gemaakt van de gegeven primitieve. De oppervlakte van het bovenste deel is gelijk aan de oppervlakte van de driehoek min de oppervlakte van het onderste deel, oftewel $\frac{1}{2a} - \frac{1}{ae}$. De verhouding tussen de oppervlakten is dan

$$\frac{1}{ae} : \frac{1}{2a} - \frac{1}{ae} = \frac{1}{e} : \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

   Deze verhouding is inderdaad onafhankelijk van a.