

7 Kleinste amplitude

15. Merk eerst op dat de amplitude van de sinusöide gelijk is aan $A(a) = \frac{a}{\ln a}$. Nu wil je weten voor welke a deze amplitude maximaal is. Hiervoor reken je eerst de afgeleide van A uit. Let hierbij op de quotiëntregel. De afgeleide is

$$A'(a) = \frac{\ln a \cdot 1 - a \cdot \frac{1}{a}}{(\ln a)^2} = \frac{\ln a - 1}{(\ln a)^2}.$$

Nu wil je weten voor welke a geldt dat $A'(a) = 0$. Dit geeft:

$$\begin{aligned}\frac{\ln a - 1}{(\ln a)^2} &= 0, \\ \ln a - 1 &= 0, \\ \ln a &= 1, \\ a &= e^1 = e.\end{aligned}$$

Als je dit invult krijg je voor de sinusöide met de kleinste amplitude $f_{\min}(x)$:

$$f_{\min}(x) = \frac{e}{\ln e} \cdot \sin x = \frac{e}{1} \cdot \sin x = e \sin x.$$

De oppervlakte van het gevraagde gebied is nu gelijk aan

$$\begin{aligned}O &= \int_0^\pi f_{\min}(x) \, dx, \\ &= \int_0^\pi e \sin x \, dx, \\ &= [-e \cos x]_0^\pi, \\ &= (-e \cos \pi) - (-e \cos 0), \\ &= e + e, \\ &= 2e.\end{aligned}$$