6 Drie halve cirkels

12. Je weet dat driehoeken $\triangle ACE$ en $\triangle CBF$ gelijkvormig zijn. De verhouding van de zijden AC en CB is $1 : 3$, dus als $CE = x$, dan moet $BF = 3x$. Nu kun je in driehoek $\triangle CBF$ de stelling van Pythagoras toepassen om de lengte van CF te vinden. Dan vind je

$$CF = \sqrt{CB^2 - BF^2} = \sqrt{3^2 - (3x)^2} = \sqrt{9 - 9x^2} = 3\sqrt{1 - x^2}.$$

De oppervlakte van $CFDE$ is dan

$$O_{CFDE} = CE \cdot CF = x \cdot 3\sqrt{1 - x^2} = 3\sqrt{x^2 - x^4}.$$

13. Je wilt weten voor welke x de oppervlakte van $CFDE$ gelijk is aan $\sqrt{2}$. Je moet dus de volgende vergelijking oplossen:

$$3\sqrt{x^2 - x^4} = \sqrt{2}.$$

Je begint met beide zijden te kwadrateren, en daarna los je de resulterende vergelijking op voor x^2 met behulp van de abc-formule:

$$9(x^2 - x^4) = 2,$$
$$-9x^4 + 9x^2 - 2 = 0,$$

$$x^2 = \frac{-9 - \sqrt{9^2 - 4 \cdot -9 \cdot -2}}{2 \cdot -9} \bigvee x^2 = \frac{-9 + \sqrt{9^2 - 4 \cdot -9 \cdot -2}}{2 \cdot -9},$$
$$x^2 = \frac{2}{3} \bigvee x^2 = \frac{1}{3},$$
$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \bigvee x = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Hier negeer je de negatieve oplossing, aangezien een lengte niet negatief kan zijn. Nu moet je nog beslissen welke van deze twee oplossingen bij de gevraagde situatie hoort. Je weet dat als E op de linker helft van de boog AC ligt, x in ieder geval groter moet zijn dan $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dit is namelijk de waarde die x aanneemt als E precies in het midden ligt. Je concludeert dat alleen $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ hieraan voldoet.

14. Je begint met uitrekenen voor welke waarde voor x de oppervlakte maximaal is. Hiervoor reken je eerst de afgeleide van O_{CFDE} uit. Let hierbij op de kettingregel.

$$O'_{CFDE} = \frac{1}{6\sqrt{x^2 - x^4}} \cdot (2x - 4x^3) = \frac{x - 2x^3}{3\sqrt{x^2 - x^4}}.$$

Nu ga je kijken voor welke x deze afgeleide gelijk is aan nul.

$$\begin{aligned}\frac{x-2x^3}{3\sqrt{x^2-x^4}} &= 0,\\ x-2x^3 &= 0,\\ 2x^3 &= x,\\ x^2 &= \frac{1}{2},\\ x &= \sqrt{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Merk op dat je de eerste en de derde stap alleen kunt doen omdat je weet dat $x \neq 0$, aangezien dit zou leiden tot een oppervlakte van nul. Nu vul je $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ in in de formule voor O_{CFDE} om de maximale oppervlakte uit te rekenen:

$$O_{CFDE,\max} = O_{CFDE}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 3\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

Nu je de oppervlakte kent, en je weet dat $CE = x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, kun je uitrekenen hoe lang zijde CF is:

$$CF = \frac{O_{CFDE,\max}}{CE} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Je hebt $CE \neq CF$, dus $CFDE$ is in deze situatie geen vierkant.