

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een regenton

1 maximumscore 5

- $V = \pi \int_0^h (r(x))^2 dx$ 1
- $(r(x))^2 = \frac{1}{100}(5 + 15x - 15x^2)$ 1
- Een primitieve van $5 + 15x - 15x^2$ is $5x + 7\frac{1}{2}x^2 - 5x^3$ 1
- Dus $V = \frac{\pi}{100}(5h + 7\frac{1}{2}h^2 - 5h^3)$ 1
- $V = \frac{\pi}{100} \cdot 2\frac{1}{2}(2h + 3h^2 - 2h^3) = \frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3)$ 1

2 maximumscore 5

- Het volume van de regenton is $\frac{3\pi}{40} (\approx 0,236) \text{ (m}^3\text{)}$ (of nauwkeuriger) 1
 - $\frac{3}{4} \cdot \frac{3\pi}{40} = \frac{9\pi}{160} (\approx 0,177)$ (of nauwkeuriger) 1
 - Voor de waterhoogte h geldt: $\frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3) = \frac{9\pi}{160}$
(of $\frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3) \approx 0,177$) 1
 - Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
 - Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm) 1
- of
- Voor $h = 1$ is $2h + 3h^2 - 2h^3$ gelijk aan 3 1
 - Voor de waterhoogte h moet gelden: $2h + 3h^2 - 2h^3 = \frac{3}{4} \cdot 3$ 2
 - Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
 - Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een ellipsvormige baan

3 maximumscore 3

- De afstand van P tot de oorsprong op tijdstip t is

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2 + \left(\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right)\right)^2} \quad 1$$

- Beschrijven hoe het maximum van deze afstand kan worden bepaald 1
- Het antwoord: 1,04 1

4 maximumscore 4

- $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cos t$ 1

- $\frac{dy}{dt} = \cos\left(t + \frac{1}{3}\pi\right)$ 1

- Voor $t=0$ geldt: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ en $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}$ 1

- De snelheid is dan $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een vergelijkbare uitdrukking) 1

5 maximumscore 6

- In A en B geldt: $\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin t$ 1

- Dus $t + \frac{1}{3}\pi = t + k \cdot 2\pi$ of $t + \frac{1}{3}\pi = \pi - t + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1

- Hieruit volgt voor $0 \leq t \leq 2\pi$: $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$ 2

- Dus de coördinaten van A zijn $\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en de coördinaten van B zijn $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ 2

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

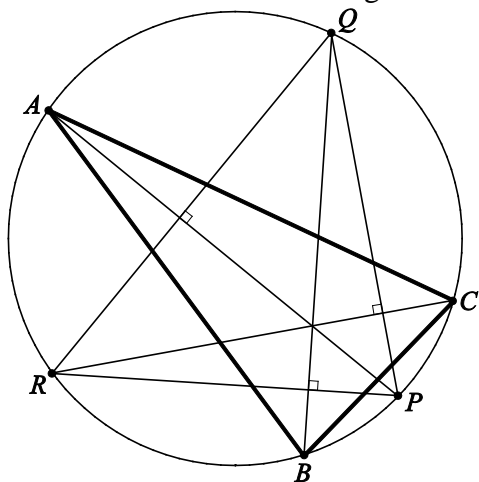
Bissectrices en omgeschreven cirkel

6 maximumscore 3

- $\angle CPQ = \angle CBQ = \angle ABQ = \angle APQ$; *constante hoek* (, *bissectrice*) 1
- $\angle CQP = \angle CAP = \angle BAP = \angle BQP$; *constante hoek* (, *bissectrice*) 1
- (Verder $PQ = PQ$, dus) $\triangle CPQ \cong \triangle SPQ$; *HZH* 1

7 maximumscore 3

- De lijn door R loodrecht op PQ tekenen; het tweede snijpunt van deze lijn met de cirkel is punt C 1
- De andere twee hoekpunten van de driehoek op soortgelijke wijze vinden 1
- De rest van de tekening 1



of

- De lijn door R loodrecht op PQ tekenen; het tweede snijpunt van deze lijn met de cirkel is punt C 1
- Het punt S tekenen als beeld van C bij spiegelen in PQ 1
- De rest van de tekening 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Medicijn in actieve vorm

8 maximumscore 3

- Er moet gelden $e^{-k \cdot t_{99}} = 0,01$ 2
- Dus $t_{99} = \frac{\ln 100}{k}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)
(of $t_{99} = \frac{4,6}{k}$ (of nauwkeuriger)) 1

Opmerking

Als met $e^{-k \cdot t_{99}} = 0,99$ is gerekend, dan voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.

9 maximumscore 4

- $a'(t) = 25(-0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t})$ 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $25(-0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t}) = 0$ kan worden opgelost 1
- $t_{\max} \approx 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{\max} = \frac{10}{3} \ln 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)) 1

10 maximumscore 6

- Beschrijven hoe met de GR het maximum van $a(t)$ berekend kan worden 1
- Dit maximum is (ongeveer) 11,8 1
- Beschrijven hoe met de GR de t -waarden die behoren bij de snijpunten met de horizontale lijn op hoogte 5,9 gevonden kunnen worden 1
- De t -waarden zijn (ongeveer) 1,0 en 14,3 (of nauwkeuriger) 2
- Het antwoord: 13 (uur) 1

of

- Substitutie van $t_{\max} = 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{\max} = \frac{10}{3} \ln 4$) in de formule voor $a(t)$ geeft $a_{\max} \approx 11,8$ (of nauwkeuriger) 1
- Opgelost moet worden $25(e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}) = \frac{1}{2} \cdot 11,8$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $t \approx 1,0$ of $t \approx 14,3$ (of nauwkeuriger) 2
- Het antwoord: 13 (uur) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Onafhankelijk van p

11 maximumscore 8

- $f(x) = 0$ geeft ($x = 0$ of) $x = 3p$ (dus de x -coördinaat van A is $3p$) 1
- De oppervlakte van het grijze gebied is $\left[-\frac{1}{4}x^4 + px^3\right]_0^{3p}$ 1
- Dit is $-\frac{1}{4}(3p)^4 + p(3p)^3 = -\frac{81}{4}p^4 + 27p^4 = \frac{27}{4}p^4$ 1
- $f'(x) = -3x^2 + 6px$ 1
- $f'(x) = 0$ geeft ($x = 0$ of) $x = 2p$ (dus de x -coördinaat van T is $2p$) 1
- $f(2p) = -(2p)^3 + 3p \cdot (2p)^2 = 4p^3$ (dus de y -coördinaat van T is $4p^3$) 1
- De oppervlakte van $OABC$ is dus $3p \cdot 4p^3 = 12p^4$ 1
- Dus de verhouding van de oppervlakten is $\frac{27}{4}p^4 : 12p^4 = \frac{27}{4} : 12 (= 9 : 16)$ (en dit is onafhankelijk van p) 1

Opmerking

Als slechts voor een aantal waarden van p de verhouding is uitgerekend en dan geconcludeerd is dat de verhouding telkens gelijk is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

Drie halve cirkels

12 maximumscore 3

- Uit de gelijkvormigheid van driehoek ACE en driehoek CBF volgt $BF = 3x$ 1
 - Dus $CF = \sqrt{3^2 - (3x)^2} = 3\sqrt{1 - x^2}$ (;Pythagoras) 1
 - De oppervlakte van $CFDE$ is dus $x \cdot 3\sqrt{1 - x^2} = 3\sqrt{x^2 - x^4}$ 1
- of
- Uit de gelijkvormigheid van driehoek ACE en driehoek CBF volgt $CF = 3 \cdot AE$ 1
 - Dus $CF = 3\sqrt{1 - x^2}$ (;Pythagoras) 1
 - De oppervlakte van $CFDE$ is dus $x \cdot 3\sqrt{1 - x^2} = 3\sqrt{x^2 - x^4}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
13	maximumscore 5	
	• $3\sqrt{x^2 - x^4} = \sqrt{2}$ geeft $9x^4 - 9x^2 + 2 = 0$	2
	• $(3x^2 - 1)(3x^2 - 2) = 0$ (of de abc-formule gebruiken of kwadraat afsplitsen)	1
	• Dit geeft $x^2 = \frac{1}{3}$ of $x^2 = \frac{2}{3}$	1
	• Dus de lengte van CE is $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($= \frac{1}{3}\sqrt{6}$) (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
14	maximumscore 7	
	• De afgeleide van $3\sqrt{x^2 - x^4}$ is $3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x^4}} \cdot (2x - 4x^3)$	2
	• De afgeleide is 0 als $2x - 4x^3 = 0$ (en $x^2 - x^4 \neq 0$)	1
	• Dit geeft $x^2 = \frac{1}{2}$, dus als de oppervlakte van $CFDE$ maximaal is, is de lengte van CE $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	2
	• De oppervlakte van rechthoek $CFDE$ is dan $3\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$	1
	• De lengte van DE is dan $\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking), dus $CFDE$ is geen vierkant	1
	of	
	• De afgeleide van $3\sqrt{x^2 - x^4}$ is $3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x^4}} \cdot (2x - 4x^3)$	2
	• De afgeleide is 0 als $2x - 4x^3 = 0$ (en $x^2 - x^4 \neq 0$)	1
	• Dit geeft $x^2 = \frac{1}{2}$, dus als de oppervlakte van $CFDE$ maximaal is, is de lengte van CE $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	2
	• Als $CFDE$ bij maximale oppervlakte een vierkant is, is deze oppervlakte $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$	1
	• Invullen van $x^2 = \frac{1}{2}$ in de formule voor de oppervlakte van de rechthoek $CFDE$ geeft als uitkomst $3\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$, dus $CFDE$ is geen vierkant	1
	of	

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> $3\sqrt{x^2 - x^4}$ is maximaal als $x^2 - x^4$ maximaal is 	2
	<ul style="list-style-type: none"> De afgeleide van $x^2 - x^4$ is $2x - 4x^3$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $2x - 4x^3 = 0$ geeft $x^2 = \frac{1}{2}$, dus als de oppervlakte van <i>CFDE</i> maximaal is, is de lengte van <i>CE</i> $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 	2
	<ul style="list-style-type: none"> Dan geldt $CF = 3 \cdot AE = 3\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$, dus <i>CFDE</i> is geen vierkant 	2
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> De rechthoek is een vierkant als $3\sqrt{1 - x^2} = x$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dit geeft $9(1 - x^2) = x^2$, dus $x^2 = \frac{9}{10}$, dus $x = \sqrt{\frac{9}{10}}$ 	2
	<ul style="list-style-type: none"> De afgeleide van $3\sqrt{x^2 - x^4}$ is $3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x^4}} \cdot (2x - 4x^3)$ 	2
	<ul style="list-style-type: none"> De afgeleide waarde voor $x = \sqrt{\frac{9}{10}}$ is $3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{10} - \frac{81}{100}}} \cdot \left(2\sqrt{\frac{9}{10}} - 4 \cdot \frac{9}{10} \cdot \sqrt{\frac{9}{10}}\right)$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dit is niet gelijk aan 0, dus als de oppervlakte van <i>CFDE</i> maximaal is, is <i>CFDE</i> geen vierkant 	1

Kleinste amplitude

15 maximumscore 8

- De amplitude van de grafiek van f_a is $A(a) = \frac{a}{\ln a}$ 2
- $A'(a) = \frac{1 \cdot \ln a - a \cdot \frac{1}{a}}{(\ln a)^2} = \frac{\ln a - 1}{(\ln a)^2}$ 2
- $A'(a) = 0$ geeft $a = e$ (dus de kleinste amplitude is e) 1
- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $\int_0^{\pi} e \cdot \sin x \, dx$ 1
- Een primitieve van $\sin x$ is $-\cos x$ 1
- De gevraagde oppervlakte is $2e$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Vier punten op een cirkel

16 maximumscore 4

- $\angle ABP' = 90^\circ$; raaklijn 1
- Dus $\angle AP'B = 90^\circ - \angle BAP$; hoekensom driehoek 1
- $\angle APB = 90^\circ$; Thales 1
- Dus $\angle ABP = 90^\circ - \angle BAP$; hoekensom driehoek (dus $\angle ABP = \angle AP'B$) 1

of

- $\angle P'BP = \angle BAP$; hoek tussen koorde en raaklijn 1
- $\angle APB = 90^\circ$; Thales 1
- Dus $\angle P'PB = 180^\circ - \angle APB = 90^\circ$; gestrekte hoek 1
- Dus $\angle ABP = 90^\circ - \angle BAP = 90^\circ - \angle P'BP = \angle AP'B$; hoekensom driehoek 1

of

- $\angle ABP' = 90^\circ$; raaklijn 1
- $\angle APB = 90^\circ$; Thales 1
- $\angle APB = \angle ABP'$ en $\angle BAP = \angle P'AB$, dus de driehoeken APB en ABP' zijn gelijkvormig; *hh*, dus $\angle ABP = \angle AP'B$ 2

17 maximumscore 4

- $\angle PQQ' + \angle AQP = 180^\circ$; gestrekte hoek 1
- $\angle AQP = \angle ABP$; constante hoek 1
- Uit $\angle ABP = \angle AP'B$ en $\angle AQP = \angle ABP$ volgt $\angle AQP = \angle AP'B$ 1
- Dus $\angle PQQ' + \angle AP'B = 180^\circ$ en hieruit volgt $PQQ'P'$ is een koordenvierhoek (dus P , Q , Q' en P' liggen op één cirkel; koordenvierhoek) 1