

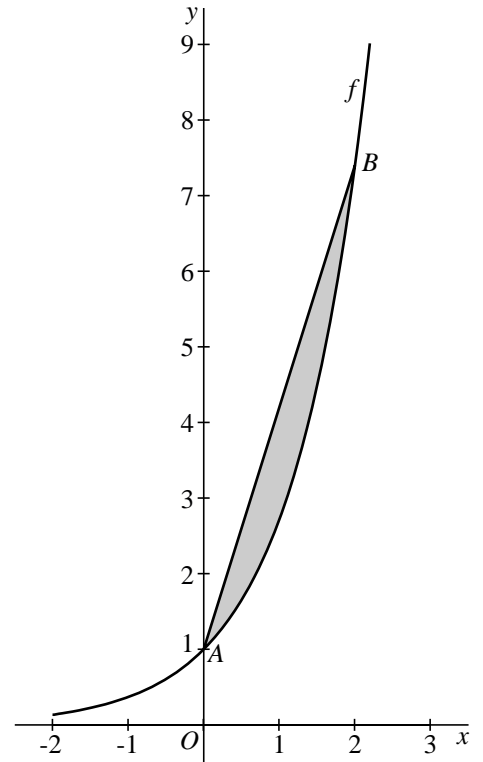
**Oppervlakte en inhoud bij  $f(x) = e^x$**

De functie  $f$  is gegeven door  $f(x) = e^x$ .  
 Op de grafiek van deze functie liggen de punten  $A(0, 1)$  en  $B(2, e^2)$ .

De grafiek van  $f$  en het lijnstuk  $AB$  sluiten een vlakdeel in. Zie figuur 1.

- 6p 1 Bereken algebraïsch de oppervlakte van dat vlakdeel.

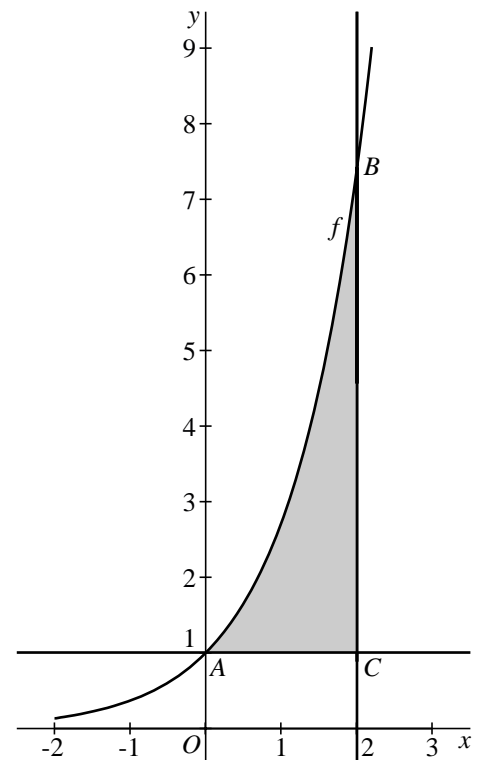
**figuur 1**



De grafiek van  $f$ , de lijn  $y = 1$  en de lijn  $x = 2$  sluiten een vlakdeel in. Zie figuur 2. We wentelen dit vlakdeel om de lijn  $y = 1$ .

- 6p 2 Bereken de exacte inhoud van het omwentelingslichaam dat dan ontstaat.

**figuur 2**

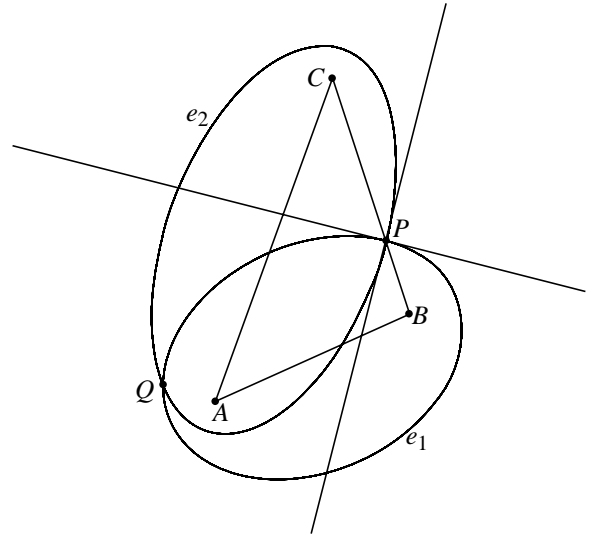


### Met een gemeenschappelijk brandpunt

Gegeven is een driehoek  $ABC$ , met een punt  $P$  op de zijde  $BC$ .  
De ellips  $e_1$  heeft  $A$  en  $B$  als brandpunten en de ellips  $e_2$  heeft  $A$  en  $C$  als brandpunten.  
De ellipsen  $e_1$  en  $e_2$  snijden elkaar in de punten  $P$  en  $Q$ .

In het punt  $P$  tekenen we de raaklijnen aan beide ellipsen. Zie figuur 1.  
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1

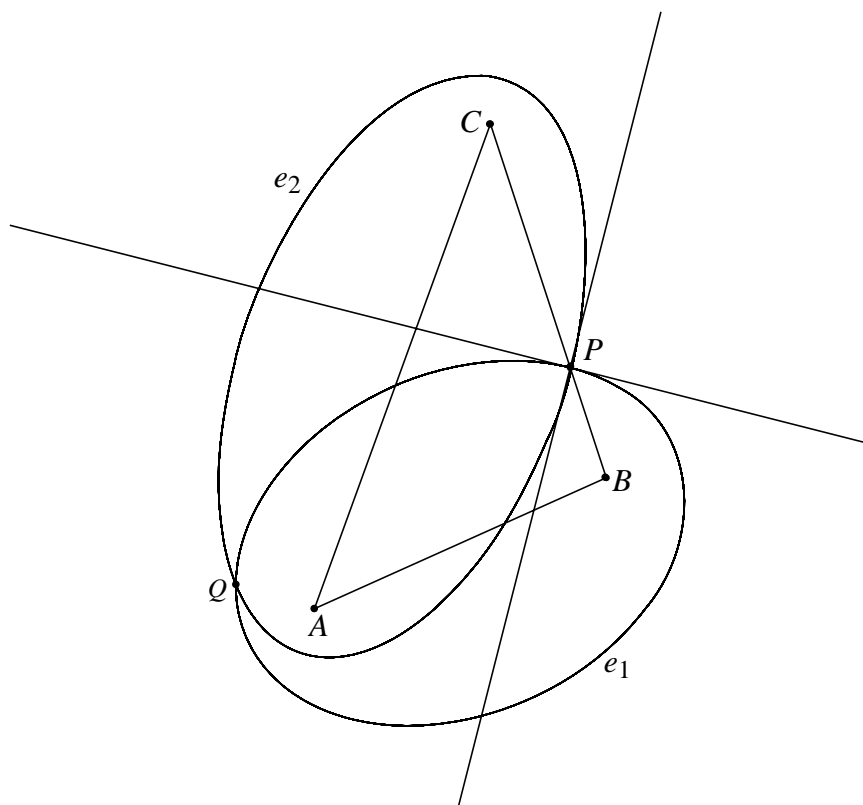


5p **3** De raaklijnen staan loodrecht op elkaar.  
Bewijs dit. Je kunt daarvoor gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

4p **4** Bewijs dat er een hyperbool bestaat met brandpunten  $B$  en  $C$  die door de punten  $P$  en  $Q$  gaat.

uitwerkbijlage

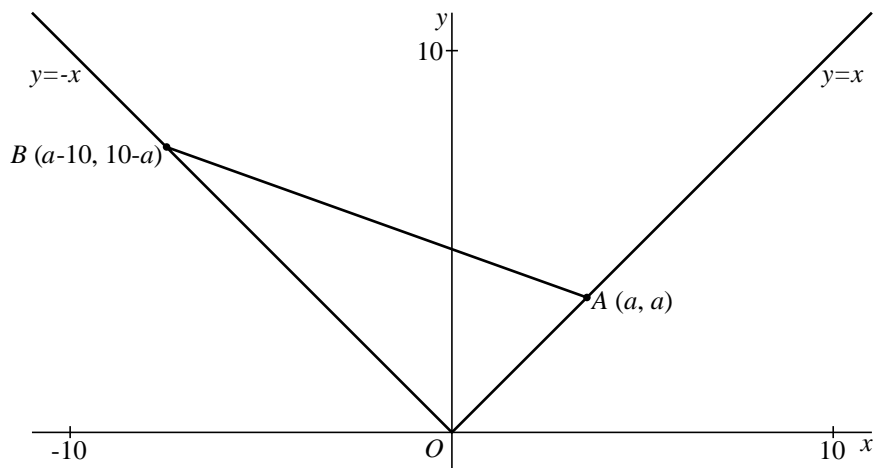
3



## Een parabool?

Voor elk getal  $a$  met  $0 \leq a \leq 10$  zijn gegeven:  
 het punt  $A(a, a)$  op de lijn  $y = x$  en het punt  $B(a-10, 10-a)$  op de lijn  $y = -x$ .  
 Zie figuur 1.

figuur 1

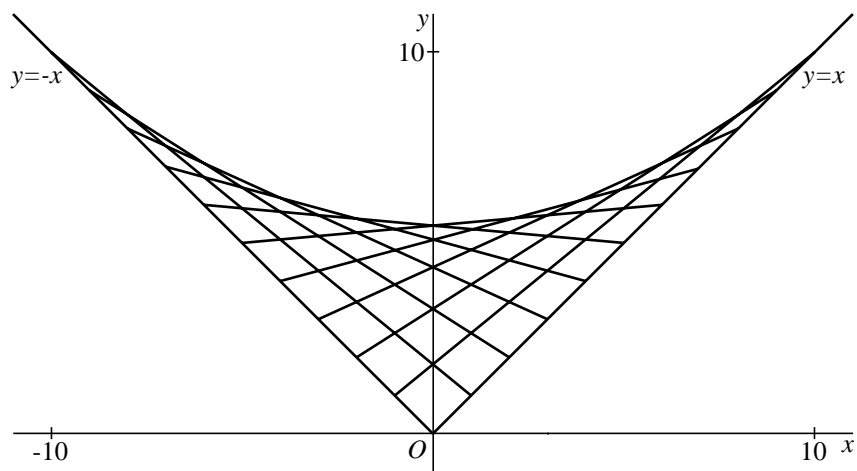


Voor de lijn  $AB$  geldt de formule  $y = (\frac{1}{5}a - 1)x - \frac{1}{5}a^2 + 2a$ .

- 4p **5** Toon aan dat deze formule juist is voor  $a = 4$ .

Voor elke waarde van  $a$  tussen 0 en 10 heeft het lijnstuk  $AB$  een snijpunt met de  $y$ -as. Zie figuur 2.

figuur 2

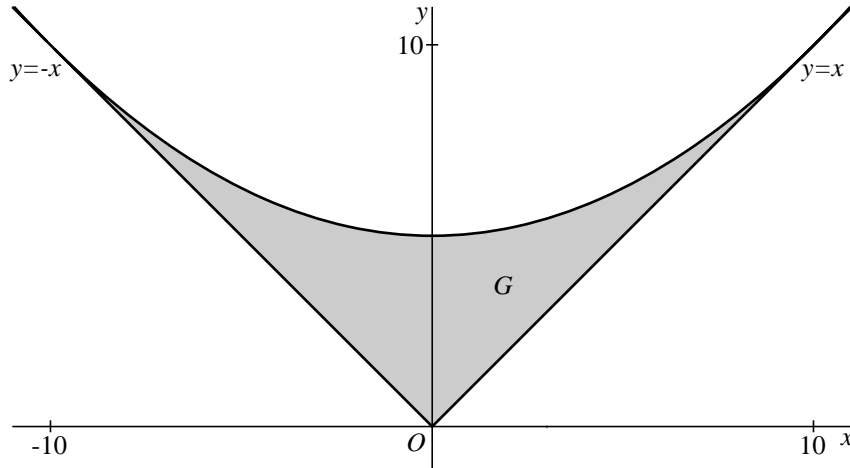


De grootste waarde die de  $y$ -coördinaat van zo'n snijpunt aanneemt is 5.

- 4p **6** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

Als je alle verbindingslijnstukken  $AB$  tekent voor  $0 \leq a \leq 10$ , wordt een gebied  $G$  opgevuld. In figuur 3 is het gebied  $G$  grijs gemaakt.

**figuur 3**



Het lijkt alsof het gebied  $G$  aan de bovenkant begrensd wordt door een parabool. Als dit juist is, is dat de parabool die door de punten  $(0, 5)$ ,  $(10, 10)$  en  $(-10, 10)$  gaat.

Een formule van die parabool is:  $y = \frac{1}{20}x^2 + 5$ .

$(4, 5\frac{4}{5})$  is een punt van deze parabool.

Als het gebied  $G$  aan de bovenkant begrensd wordt door deze parabool, is de raaklijn aan de parabool in  $(4, 5\frac{4}{5})$  een van de lijnen  $AB$ .

- 6p **7** Onderzoek of de raaklijn aan de parabool in  $(4, 5\frac{4}{5})$  een van de lijnen  $AB$  is.

## Wisselingen in rijtjes kop en munt

Het komt wel eens voor dat onderzoeksresultaten vervalst worden om gewenste uitkomsten te krijgen. In deze opgave bekijken we een wiskundige techniek om zulke fraude te achterhalen. Deze techniek is erop gebaseerd dat het verdacht is als in rijtjes onafhankelijke waarnemingen te veel afwisseling voorkomt. We demonstreren deze techniek aan de hand van een sterk vereenvoudigde situatie: het meerdere keren werpen van een muntstuk.

We werpen tien keer een zuiver muntstuk en noteren de rij uitkomsten:

$\overset{1}{\otimes} - \overset{2}{\otimes} - \overset{3}{\otimes} - \overset{4}{\otimes} - \overset{5}{\otimes} - \overset{6}{\otimes} - \overset{7}{\otimes} - \overset{8}{\otimes} - \overset{9}{\otimes} - \otimes$

Hierin stelt  $\otimes$  telkens kop (K) of munt (M) voor. We kijken naar **het aantal wisselingen** in zo'n rijtje. De negen plekken waar een wisseling kan optreden, zijn genummerd.

- 3p **8** Toon aan dat er 252 verschillende rijtjes van tien worpen zijn met precies 5 wisselingen.

In onderstaande tabel staan de kansen op de verschillende aantallen wisselingen bij tien keer werpen van een muntstuk.

aantal wisselingen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
kans	$\frac{2}{1024}$	$\frac{18}{1024}$	$\frac{72}{1024}$	$\frac{168}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{168}{1024}$	$\frac{72}{1024}$	$\frac{18}{1024}$	$\frac{2}{1024}$

Jolly moet tien keer een muntstuk werpen, het verkregen rijtje noteren en de wisselingen tellen. Dit saaie werk moet zij 20 keer doen.

- 3p **9** Bereken de kans dat de 20 rijtjes allemaal ten minste één wisseling hebben.

Hieronder staan de rijtjes die Jolly heeft opgeschreven met achter elk rijtje het aantal wisselingen.

KMKKMMM KMM 5	KKMKMMM KKK 4	MMM KMKMM KM 6	KMKMKKKK MK 6	MMKKKMMMM K 3
MMM KKKM KMM 4	MKMMM KKKMM 4	MKKKMMMM KM 4	KMKKMMKKMM 5	MMMMKKKKKK 1
MMKKKKKMMM 2	MMKMKMKMK 7	KMKKMKMMKK 6	MMM KMMMMM K 3	KMMKMMKKMK 6
KKKMKMKMK 6	MKMKMKMMK 7	KKKKKMMMM 3	KKMKMKMMKK 6	MKMKMMKKKM 6

We vragen ons af of Jolly wel echt met een muntstuk heeft geworpen. Zij heeft namelijk 9 rijtjes met meer dan 5 wisselingen genoteerd.

Als iemand echt met een muntstuk werpt, is de kans op 9 of meer rijtjes met meer dan 5 wisselingen nogal klein. Als die kans kleiner dan 5% is, vertrouwen we Jolly niet en verdenken we haar ervan dat zij - zonder echt met een muntstuk te werpen - zomaar wat K-M-rijtjes heeft opgeschreven.

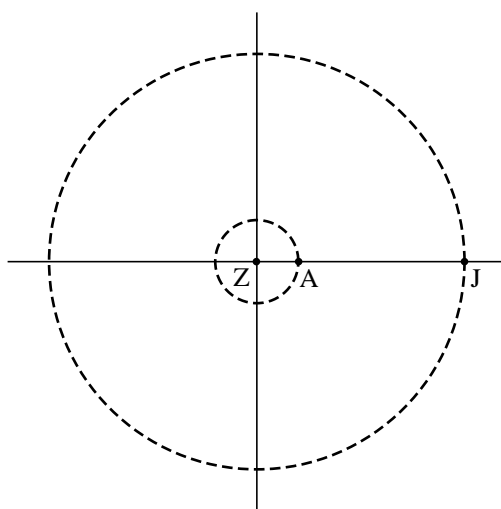
- 5p **10** Is er voldoende aanleiding om Jolly niet te vertrouwen? Licht je antwoord toe.

## Jupiter en Aarde

De planeten Jupiter en Aarde draaien om de zon. In deze opgave doen we de werkelijkheid enigszins geweld aan met de volgende vereenvoudigingen:

- de banen van Jupiter en Aarde zijn cirkelvormig
- de banen liggen in één vlak
- Jupiter en Aarde hebben constante snelheid
- Jupiter en Aarde zijn puntvormig
- de omlooptijd van Aarde is 1 jaar
- de omlooptijd van Jupiter is 12 jaar
- de afstand Jupiter-Zon is 5 keer zo groot als de afstand Aarde-Zon

figuur 1



We kiezen een assenstelsel in het vlak waar Jupiter en Aarde zich bewegen met Zon in de oorsprong en als lengte-eenheid de astronomische eenheid (AE); dat is de afstand Aarde-Zon.

Aarde heeft in dit model de bewegingsvergelijkingen:  $x_A = \cos 2\pi t$ ,  $y_A = \sin 2\pi t$ .

De bewegingsvergelijkingen van Jupiter zijn:  $x_J = 5 \cos \frac{1}{6}\pi t$ ,  $y_J = 5 \sin \frac{1}{6}\pi t$ .

Hierbij is  $t$  de tijd in jaren.

In figuur 1 staat een schets van de situatie op tijdstip  $t = 0$ .

De onderlinge afstand tussen Jupiter en Aarde op tijdstip  $t$  is, volgens de stelling van Pythagoras,  $\sqrt{(x_A - x_J)^2 + (y_A - y_J)^2}$  AE.

Met behulp van de bewegingsvergelijkingen kan aangetoond worden dat deze afstand gelijk is aan  $\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6}\pi t)}$  AE.

5p **11** Toon dit aan.

5p **12** Bereken op algebraïsche wijze met welke snelheid de afstand tussen Aarde en Jupiter verandert op tijdstip  $t = 3$ . Geef je antwoord in AE/jaar, afgerond op twee decimalen.

### Met constante hoek

Gegeven is een lijnstuk  $AB$ .

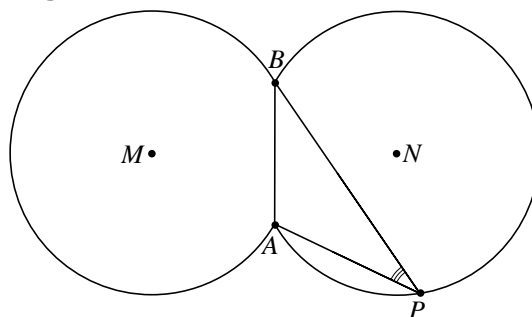
We bekijken alle punten  $P$  waarvoor geldt dat  $\angle APB = 30^\circ$ . De meetkundige plaats van al deze punten  $P$  bestaat volgens de *stelling van de constante hoek* uit twee cirkelbogen.

Voor de middelpunten  $M$  en  $N$  van die cirkelbogen geldt:  $\angle AMB = \angle ANB = 60^\circ$ . De twee bogen zijn in figuur 1 getekend met een van de punten  $P$  als voorbeeld.

Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

De twee cirkelbogen ontmoeten elkaar in  $A$  en in  $B$ . Onder de hoek tussen de cirkelbogen in  $A$  verstaan we de hoek die de raaklijnen aan de bogen in  $A$  met elkaar maken.

figuur 1

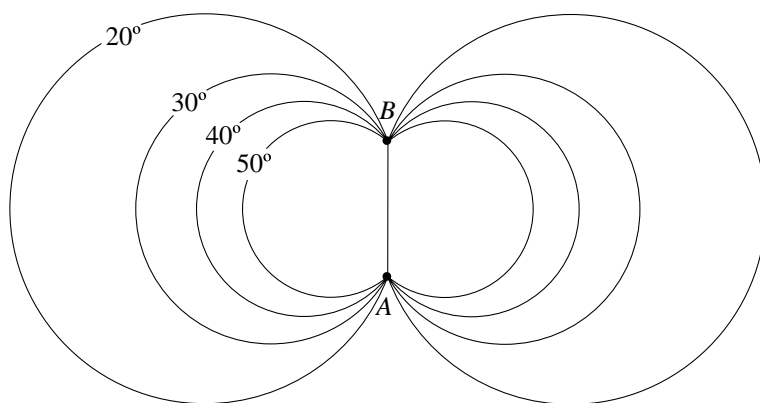


4p **13** Bereken deze hoek. Je kunt daarbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

4p **14** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de meetkundige plaats van alle punten  $P$  waarvoor geldt dat  $\angle APB = 45^\circ$ . Licht je werkwijze toe.

In figuur 2 zijn vier meetkundige plaatsen getekend. Deze meetkundige plaatsen horen bij alle punten  $P$  waarvoor respectievelijk  $\angle APB = 20^\circ$ ,  $\angle APB = 30^\circ$ ,  $\angle APB = 40^\circ$  en  $\angle APB = 50^\circ$ .

figuur 2



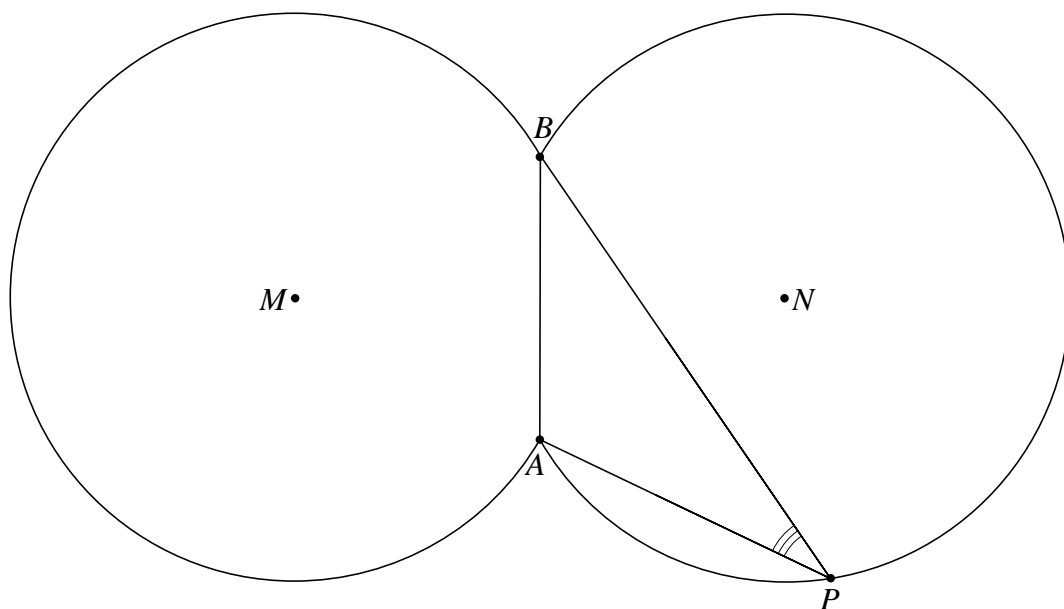
Er bestaat een simpel verband tussen één van deze vier meetkundige plaatsen en de (niet getekende) meetkundige plaats van alle punten  $P$  waarvoor geldt dat  $\angle APB = 140^\circ$ .

3p **15** Welk verband en welke meetkundige plaats worden hier bedoeld? Licht je antwoord toe.



uitwerkbijlage

13



**uitwerkbijlage**

14



## Rij en oppervlakte

De functie  $f$  is gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

De oppervlakte van het vlakdeel dat ingesloten wordt door de grafiek van  $f$  en de lijnen  $x = 0$ ,  $x = 1$  en  $y = 0$  kunnen we benaderen met een Riemann-ondersom  $R_n$ .

$R_n$  is de totale oppervlakte van  $n$

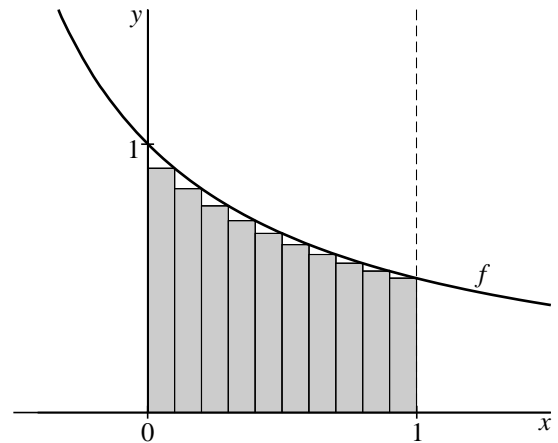
rechthoeken van breedte  $\frac{1}{n}$ .

De hoogte van de  $i$ -de rechthoek van

links is  $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{\frac{i}{n}+1}$ , voor  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Figuur 1 illustreert de Riemann-ondersom  $R_{10}$ .

figuur 1



- 3p **16** Bereken de Riemann-ondersom  $R_{100}$  in vier decimalen nauwkeurig.

Uit de gegevens is af te leiden dat voor de Riemann-ondersom  $R_n$  geldt:

$$R_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

- 3p **17** Geef deze afleiding.
- 4p **18** Bereken exact de waarde van  $R_{100} - R_{99}$ .

De rij  $R_1, R_2, R_3, R_4, \dots$  heeft een limiet. Deze limiet is te berekenen met behulp van de functie  $f$ .

- 4p **19** Bereken deze limiet exact.