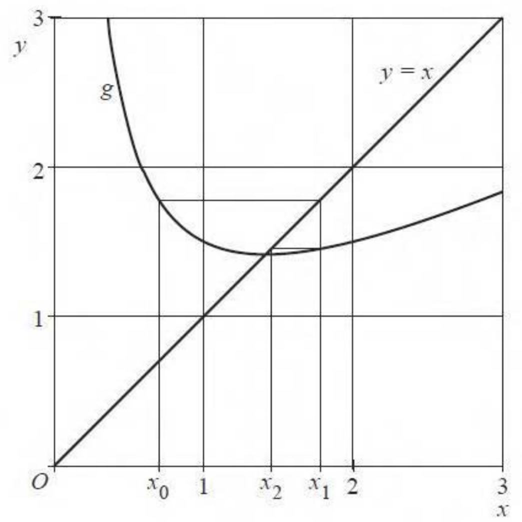
Een benadering van een nulpunt

1. Bij het tekenen van een webgrafiek ga je altijd zo te werk: Eerst ga je vanuit x_0 verticaal naar de grafiek van $g(x)$. Vanuit dat punt ga je horizontaal naar de lijn $y = x$. Van daaruit ga je weer verticaal naar de grafiek van $g(x)$, enzovoort. Elke verticale lijn die je zo tekent komt overeen met een zekere x_n, de eerste verticale lijn komt overeen met x_0, de tweede met x_1, enzovoort. Zie ook onderstaande afbeelding.



2. Eerst reken je de x-coördinaat van de top uit. Omdat er exact staat moet dit algebraïsch. Je begint met het differentiëren van $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + x^{-1}$$
$$g'(x) = \frac{1}{2} + (-1)x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

Op de top geldt $g'(x) = 0$, dus:

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2} \bigvee x = -\sqrt{2}$$

Nu ga je naar de limiet van de rij $x_0, x_1, x_2, ...$ kijken. In die limiet geldt $x_n = x_{n+1}$, oftewel $x = g(x)$.

$$
\begin{aligned}
x &= g(x) \\
x &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} \\
\frac{1}{2}x &= \frac{1}{x} \\
\frac{1}{2}x^2 &= 1 \\
x^2 &= 2 \\
x = \sqrt{2} &\bigvee x = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Van deze oplossingen heb je alleen de positieve nodig, aangezien de rij naar dat punt convergeert. Je ziet dat de limiet en de top precies samenvallen.

3. Je rekent eerst uit wat $f(x_n)$ en $f'(x_n)$ zijn.

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= x_n^2 - 2 \\
f'(x_n) &= 2x_n
\end{aligned}
$$

Nu vul je deze twee uitdrukkingen in in de formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{2}{2x_n} \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}
\end{aligned}
$$