4 Evenwijdige lijnen

9. Een manier om te beginnen is om de oppervlakte van beide vlakken uit te drukken in c. Hiervoor heb je de oppervlakte tussen de grafiek van f, de x-as en de y-as. Deze oppervlakte noem ik A. Dan geldt:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x \\
A &= \int_0^4 4 - \frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x \\
A &= \left[4x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 \\
A &= \left[4x - \frac{1}{12}x^3\right]_0^4 \\
A &= 4\cdot 4 - \frac{1}{12}4^3 - 4\cdot 0 + \frac{1}{12}0^3 \\
A &= 10\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

De driehoek $\triangle OAB$ heeft basis 4 en hoogte 4, dus volgens de formule voor de oppervlakte van een driehoek geldt nu dat deze oppervlakte gelijk is aan $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$. De oppervlakte van het lichtgrijze vlak wordt dan de oppervlakte A min de oppervlakte van $\triangle OAB$, dus dit vlak heeft oppervlakte $10\frac{2}{3} - 8 = 2\frac{2}{3}$. De grote driehoek heeft hoogte c, en omdat lijn k en lijn AB evenwijdig zijn is zijn basis ook c. Zijn oppervlakte is dan $\frac{1}{2}\cdot c\cdot c = \frac{1}{2}c^2$. De oppervlakte van het donkergrijze vlak is dan $\frac{1}{2}c^2 - 10\frac{2}{3}$. Nu weet je dat de oppervlakte van het lichtgrijze vlak en de oppervlakte van het donkergrijze vlak gelijk zijn. Oftewel:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}c^2 - 10\frac{2}{3} &= 2\frac{2}{3} \\
\frac{1}{2}c^2 &= 13\frac{1}{3} \\
c^2 &= 26\frac{2}{3} = \frac{80}{3} \\
c &= \sqrt{\frac{80}{3}}
\end{aligned}
$$

Voor $c = \sqrt{\frac{80}{3}}$ geldt dus dat het lichtgrijze vlak gelijk is aan het donkergrijze vlak.