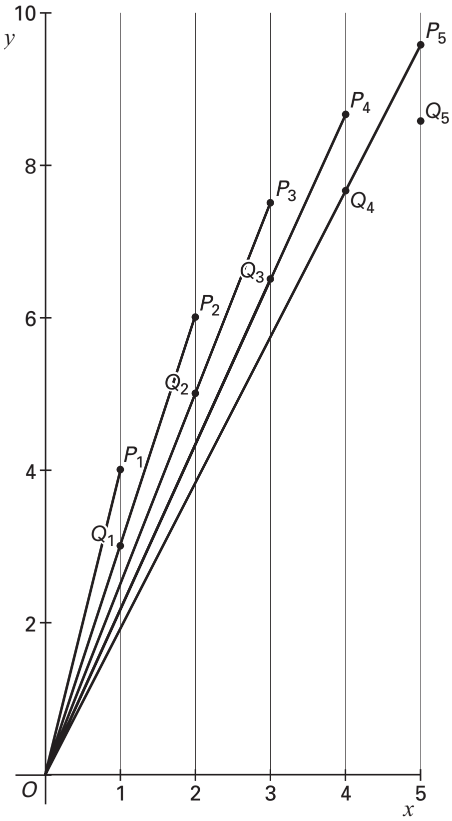
Een rij punten

We definiëren in een assenstelsel twee rijen punten P_n en Q_n (n = 1, 2, 3, …) als volgt:

- P_1 is het punt (1, 4).
  Q_1 ligt recht onder P_1, op afstand 1 van P_1, dus Q_1 = (1, 3).
- P_2 is het snijpunt van de lijn OQ_1 met de lijn x = 2.
  Q_2 ligt recht onder P_2, op afstand 1 van P_2.
- P_3 is het snijpunt van de lijn OQ_2 met de lijn x = 3.
  Q_3 ligt recht onder P_3, op afstand 1 van P_3.
  Enzovoort.

In figuur 7 zijn van beide rijen de eerste vijf punten aangegeven.

figuur 7

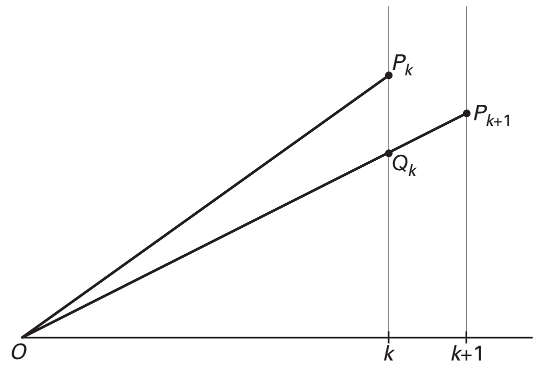


De richtingscoëfficiënt van de lijn OP_k noemen we r_k (k = 1, 2, 3, ...). Van de rij van richtingscoëfficiënten kun je de eerste drie termen uitrekenen: $r_1 = 4$, $r_2 = 3$ en $r_3 = 2\frac{1}{2}$.

Uit elke term r_k kan de volgende term r_{k+1} berekend worden met de recursieve formule:
$r_{k+1} = r_k - \frac{1}{k}$ (k = 1, 2, 3, ...).

Zie figuur 8. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 8



4p **17** ☐ Toon de juistheid van de recursieve formule aan.

Uit figuur 7 blijkt dat de hoogtes van de eerste vijf punten P_1 , P_2 , P_3 , P_4 en P_5 weliswaar een stijgende rij vormen, maar dat de toenames in hoogte steeds minder worden. Hoe het verdere verloop van de hoogtes is, is niet onmiddellijk duidelijk.

4p **18** ☐ Onderzoek met behulp van de grafische rekenmachine voor welke waarden van n de punten P_n onder de x-as liggen. Licht je werkwijze toe.

Ook zonder grafische rekenmachine kan worden aangetoond dat de punten P_n voor voldoend grote waarden van n onder de x-as komen te liggen. Daarvoor mag je gebruiken dat de limiet voor n nadert tot oneindig van $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ oneindig is.

4p **19** ☐ Toon met behulp van deze limiet aan dat de punten P_n voor voldoend grote waarden van n onder de x-as liggen.

Uitwerkbijlage bij vraag 17

Vraag 17