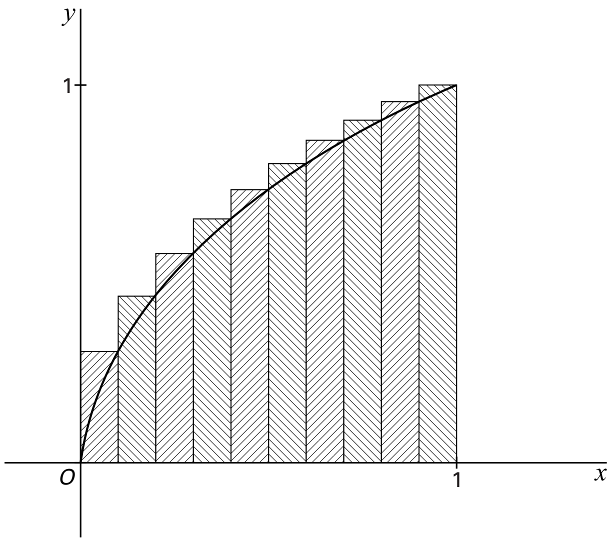
Wortels optellen

Voor kleine waarden van n is de som $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}$ nog wel uit te rekenen met de grafische rekenmachine. Voor grote waarden van n is dat zelfs voor de GR tijdrovend. Om voor grote waarden van n een schatting te hebben van de som bekijken we bovensommen van $y=\sqrt{x}$ op het interval [0, 1].

figuur 3



In figuur 3 is de grafiek van $y=\sqrt{x}$ getekend op het interval [0, 1].
Dit interval is in tien even brede stukjes verdeeld. De som van de oppervlaktes van de tien gearceerde rechthoekjes is de bovensom; deze geven we aan met B_{10}.
Figuur 3 is zonder arcering ook op de bijlage bij de vragen 5 en 6 getekend.

4p **5** ☐ Toon aan: $B_{10}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+........+\sqrt{10})$.

De ondersom die hoort bij de verdeling van het interval [0, 1] in tien even brede stukjes geven we aan met O_{10}.

4p **6** ☐ Toon aan: $B_{10}-O_{10}=\dfrac{1}{10}$.

Het interval [0, 1] wordt in n even brede stukjes verdeeld. B_n is de bijbehorende bovensom en O_n is de bijbehorende ondersom. Aangetoond kan worden dat

$$B_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+............+\sqrt{n}) \text{ en } B_n-O_n=\frac{1}{n}.$$

A is de oppervlakte onder de grafiek van $y=\sqrt{x}$ op [0, 1].

4p **7** ☐ Toon aan dat uit $A<B_n$ en $A>O_n$ volgt: $A\cdot n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+........+\sqrt{n}<A\cdot n\sqrt{n}+\sqrt{n}$.

Met behulp van deze ongelijkheid kan voor $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+........+\sqrt{10000}$ een benadering berekend worden die ten hoogste 50 afwijkt van de werkelijke waarde.

5p **8** ☐ Bereken deze benadering.

Bijlage bij de vragen 5 en 6

Vragen 5 en 6